NUMERI INTERI RELATIVI **Z**

Nell'insieme dei numeri naturali non è sempre possibile effettuare l'operazione di sottrazione.

A tal proposito si è ampliato l'insieme dei numeri naturali all'insieme dei numeri interi relativi.

L'insieme dei numeri interi relativi è costituito da tutti i numeri naturali preceduti dal segno $+$ o dal segno $-$. L'insieme dei numeri interi relativi è indicato con la lettera $\mathbf{Z}$.

Si ha cioè: $Z = \{0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, -4, +4, -5, +5, \ . \ . \ .\}$.

I numeri preceduti dal segno + si chiamano numeri **positivi**.

I numeri preceduti dal segno $-$ si chiamano **negativi**.

Lo zero è l'unico numero intero relativo senza segno.

L'insieme dei numeri interi positivi è indicato con $\boldsymbol{Z^{+}}$.

L'insieme dei numeri interi negativi è indicato con $\boldsymbol{Z^{-}}$.

Due numeri relativi aventi lo stesso segno si dicono **concordi**.

Due numeri relativi aventi segno diverso si dicono **discordi**.

Il **valore assoluto** di un numero è il numero considerato senza il segno che lo precede.

Il **valore assoluto** di un numero è indicato con il simbolo $|n|$ $\quad |n| = \begin{cases} +n & se \ \ n \geq 0 \\ -n & se \ \ n < 0 \end{cases}$

Due numeri interi si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto e sono discordi.

Il numero 0 può essere considerato opposto di se stesso.

Esempi

-2 e -5 sono *concordi*

$+2$ e -5 sono *discordi*

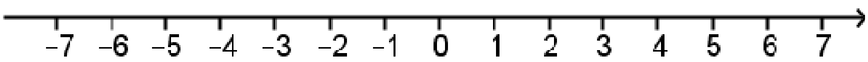
-5 e $+5$ sono opposti.

Il *valore assoluto* di $|-6|$ è 6.

Il *valore assoluto* di $|+6|$ è 6.

CONFRONTO DI NUMERI INTERI RELATIVI

L'insieme dei numeri interi relativi può essere rappresentato su una retta orientata.



Se due numeri interi relativi a e b occupano la stessa posizione nella rappresentazione sulla retta orientata si dice che sono uguali e si scrive $a = b$.

Se il numero a precede il numero b si dice che a è minore di b , e si scrive $a < b$.

Se il numero a segue il numero b si dice che a è maggiore di b , e si scrive $a > b$.

Il simbolo $\geq$ si legge *maggiore o uguale*.

Il simbolo $\leq$ si legge *minore o uguale*.

Pertanto:

- Ogni numero positivo è sempre maggiore di ogni numero negativo.
- Il numero 0 è maggiore di ogni numero negativo e minore di ogni numero positivo.
- Fra due numeri positivi, il maggiore è quello che ha valore assoluto maggiore.
- Fra due numeri negativi, il maggiore è quello che ha valore assoluto minore.

PROPRIETÀ DEI NUMERI INTERI RELATIVI

Tutte le proprietà valide per i numeri naturali sono valide per i numeri interi relativi.
Ogni numero intero relativo ha uno e un solo successivo.
L'insieme dei numeri interi relativi è **infinito**. Il che vuol dire che:
"Preso un qualunque numero intero relativo n, esiste sempre uno maggiore: il suo successivo".
L'insieme dei numeri interi relativi è un insieme **ordinato**. Il che vuol dire che:
"Dati due numeri interi relativi a e b, si verifica una e una sola delle seguenti situazioni:

$$a = b \quad \text{oppure} \quad a < b \quad \text{oppure} \quad a > b\text{" .}$$

L'insieme dei numeri interi relativi è un insieme **discreto**. Il che vuol dire che:
"Tra due numeri interi relativi n e p , non successivi, c'è un numero finito di numeri interi relativi".

OPERAZIONI CON I NUMERI INTERI RELATIVI

Addizione (CS - DD)

La somma di due numeri *concordi* è un numero che ha:

- per valore assoluto la somma fra i valori assoluti dei due numeri;
- per segno lo stesso dei due numeri.

La somma di due numeri *discordi* è un numero che ha:

- per valore assoluto la differenza fra il maggiore e il minore dei valori assoluti;
- per segno quello del numero che ha valore assoluto maggiore.

Esempi

$(+2) + (+3) = +5$

$(-2) + (-3) = -5$

$(+2) + (-3) = -1$

$(-2) + (+3) = +1$

Esistenza dell'opposto

Oltre alle proprietà dell'addizione viste con i numeri naturali, è valida anche una nuova proprietà:
Per ogni numero intero relativo a esiste un secondo, il suo opposto, tale che la loro somma è 0 *(elemento neutro dell'addizione)*.

Sottrazione

L'operazione di sottrazione è interna all'insieme dei numeri interi relativi Z**.**
La differenza di due numeri interi relativi è la somma del minuendo con l'opposto del sottraendo.

Esempi

$(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = -1$

$(+2) - (-3) = (+2) + (+3) = +5$

$(-2) - (+3) = (-2) + (-3) = -5$

$(-2) - (-3) = (-2) + (+3) = +1$

Nota

Le espressioni seguenti sono equivalenti:

$$(+4) - (+7) \quad = \quad (+4) + (-7) \quad = \quad 4 - 7$$

Addizione e sottrazione di più numeri relativi

La somma algebrica di più numeri relativi è uguale alla differenza fra la somma dei numeri positivi e la somma dei numeri negativi.

$-3 \; +7 \; -8 \; +5 \; -9 \; -4 \; +6 \; -2 \; +1 \quad = \quad (7+5+6+1)-(3+8+9+4+2) \quad = \quad 19-26=-7\,.$

Regola per togliere le parentesi

Se una parentesi, contenente un'addizione algebrica di due o più numeri relativi, è preceduta dal segno $+$, è possibile togliere la parentesi ed il segno $+$.

Esempio

$+\,(-5+7-4+8-6) \quad = \quad -5+7-4+8-6$

Se una parentesi, contenente una addizione algebrica di due o più numeri relativi, è preceduta dal segno $-$, è possibile togliere la parentesi ed il segno $-$, ma occorre cambiare il segno a tutti i termini che figurano nella parentesi.

Esempio

$-\,(-5+7-4+8-6) \quad = \quad +5-7+4-8+6$

Moltiplicazione e divisione   (C+ D-)

x	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Il prodotto di due numeri concordi è un numero positivo.
Il prodotto di due numeri discordi è un numero negativo.

Il quoziente di due numeri concordi è un numero positivo *(purché la divisione sia possibile)*.
Il quoziente di due numeri discordi è un numero negativo *(purché la divisione sia possibile)*.

Esempi

$(+2)\cdot(+3)=+6$

$(-2)\cdot(-3)=+6$

$(+2)\cdot(-3)=-6$

$(-2)\cdot(+3)=-6$

$(+6):(+3)=+2$

$(-6):(-3)=+2$

$(+6):(-3)=-2$

$(-6):(+3)=-2$

Nota

Il prodotto di più numeri relativi è :

- un numero *positivo* se i fattori negativi sono in numero *pari*
- un numero *negativo* se i fattori negativi sono in numero *dispari*

Esempi

$(+2)\cdot(+2)\cdot(+3)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-2)\cdot(-1) \quad = \quad -72$

$(+2)\cdot(-2)\cdot(+3)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-2)\cdot(-1) \quad = \quad +72$

Proprietà della moltiplicazione e della divisione

La moltiplicazione è un'operazione interna all'insieme dei numeri interi relativi Z.

Le proprietà della moltiplicazione viste per i numeri naturali sono valide anche per i numeri interi relativi:

- *commutativa*
- *associativa*
- *distributiva rispetto all'addizione*
- *esistenza dell'elemento neutro*.

La divisione non è un'operazione interna all'insieme dei numeri interi relativi Z.

Le proprietà della divisione viste per i numeri naturali sono valide anche per i numeri interi relativi:

- *invariantiva*
- *distributiva a destra rispetto all'addizione*
- *distributiva a destra rispetto alla sottrazione.*

Potenza di un numero relativo

La potenza di un numero *positivo* è un numero *positivo*.

La potenza di un numero *negativo* è:

- un numero *positivo* se l'esponente è *pari*
- un numero *negativo* se l'esponente è *dispari*

Esempi

$(+2)^3 = +8$ $(+2)^4 = +16$

$(-2)^3 = -8$ $(-2)^4 = +16$

Proprietà delle potenze

L'operazione di potenza ha la precedenza rispetto al segno della potenza. Ciò vuol dire che se una potenza è scritta senza le parentesi, essa è riferita solo al numero e non al segno che la precede.

$-\,3^2 = -\,9$ mentre $(-3)^2 = +9$

Valgono tutte le proprietà delle potenze viste con i numeri naturali.

Esempi

$(-2)^4 \cdot (-2)^3 = (-2)^{4+3}$ $(-2)^7 : (-2)^3 = (-2)^{7-3}$

$(-2)^5 \cdot (-3)^5 = (+6)^5$ $(-10)^3 : (+2)^3 = (-5)^3$

Importante

Non possiamo invece utilizzare immediatamente le proprietà delle potenze quando le basi non sono uguali anche nel segno. In questi casi occorre calcolare preventivamente il segno dell'espressione.

$(-2)^4 \cdot (+2)^3 = +(2)^{4+3}$ perché $(-2)^4$ è un numero positivo e $(+2)^3$ è un numero positivo.

$(+2)^4 \cdot (-2)^3 = -(2)^{4+3}$ perché $(+2)^4$ è un numero positivo e $(-2)^3$ è un numero negativo.

$(-2)^5 \cdot (+2)^3 = -(2)^{5+3}$ perché $(-2)^5$ è un numero negativo e $(+2)^3$ è un numero positivo.

$(+2)^5 : (-2)^3 = -(2)^{5-3}$ perché $(+2)^5$ è un numero positivo e $(-2)^3$ è un numero negativo.

$$(-4)^3 = \begin{cases} (-2)^6 & \textbf{errato} \\ -(2^6) & \textbf{corretto} \end{cases}$$

perché $(-4)^3$ *è un numero negativo*.