VALORE ASSOLUTO

Il valore assoluto di una espressione algebrica $f(x)$ *è:* $|f(x)| = \begin{cases} +f(x) & se\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se\ f(x) < 0 \end{cases}$

EQUAZIONI CON I VALORI ASSOLUTI

$\boldsymbol{|f(x)| = k}\ \ (con\ k > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = \pm k}$	1
$\boldsymbol{|f(x)| = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = 0}$	2
$\boldsymbol{|f(x)| = k}\ \ (con\ k < 0) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nexists\, x \in R}$	3
$\boldsymbol{|f(x)| = g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{f(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{f(x) = g(x)} \end{cases} \cup \begin{cases} \boldsymbol{f(x)} < 0 \\ \boldsymbol{-f(x) = g(x)} \end{cases}$	4
$\boldsymbol{|f(x)| = g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{g(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{f(x) = g(x)} \end{cases} \cup \begin{cases} \boldsymbol{g(x) \geq 0} \\ \boldsymbol{-f(x) = g(x)} \end{cases}$	5
$\boldsymbol{|f(x)| = |g(x)|} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = g(x)} \ \cup \ \boldsymbol{f(x) = -g(x)}$	6

Quando infine, figurano due o più valori assoluti occorre determinare i segni dei valori assoluti che figurano nell'equazione. Dall'esame dei segni si studiano i vari casi.

Esempio 1

$\boldsymbol{|x-5| - 1 = 0}$

$|x-5| = 1\,;$

Applicando la regola 1 si ha:

$x-5 = -1$	$\vee$	$x-5 = +1$
$x = 4$	$\vee$	$x = 6$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S = \{4\,,6\}}$.

Esempio 2

$\boldsymbol{|x-5| = 0}$

Applicando la regola 2 si ha:

$x-5 = 0\,;$

$x = 5\,;$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S = \{5\}}$.

Esempio 3

$\boldsymbol{|x-5| - 1 + \sqrt{3} = 0}$

$|x-5| = 1 - \sqrt{3}\,;$

Essendo $1 - \sqrt{3} = -0{,}732 < 0$

Applicando la regola 3 si ha che $\boldsymbol{\nexists\, x \in R}$, *l'equazione è impossibile .*

Esempio 4

$$|x-2|-2x-3=0$$

$|x-2|=2x+3$;

Applicando la regola 4 si ha:

$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ +(x-2)=2x+3 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} x-2<0 \\ -(x-2)=2x+3 \end{cases}$
$\begin{cases} x\geq 2 \\ -x=5 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} x<2 \\ -3x=1 \end{cases}$
$\begin{cases} x\geq 2 \\ x=-5 \quad \text{non accettabile} \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} x<2 \\ x=-\frac{1}{3} \quad \text{accettabile} \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S=\{-\frac{1}{3}\}}$

Esempio 5

$$|x^2-3x|-x^2-4=0$$

$|x^2-3x|=x^2+4$;

Conviene applicare la regola 5 anziché la regola 4.

$\begin{cases} x^2+4\geq 0 \\ +(x^2-3x)=x^2+4 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} x^2+4\geq 0 \\ -(x^2-3x)=x^2+4 \end{cases}$
$\begin{cases} \forall x\in R \\ -3x=4 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} \forall x\in R \\ -3x=1 \end{cases}$
$\begin{cases} \forall x\in R \\ 3x=-4 \quad \text{accettabile} \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} \forall x\in R \\ 2x^2-3x+4 \end{cases}$
$\begin{cases} \forall x\in R \\ x=-\frac{4}{3} \quad \text{accettabile} \end{cases}$		$\begin{cases} \forall x\in R \\ \nexists x\in R \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S=\{-\frac{4}{3}\}}$

Esempio 6

$$|x-5|-|3+2x|=0$$

$|x-5|=|3+2x|$;

Applicando la regola 6 si ha:

$$\begin{array}{lcl}
x-5=-(3+2x) & \vee & x-5=+(3+2x) \\
x-5=-3-2x & \vee & x-5=3+2x \\
3x=5-3 & \vee & x-2x=5+3 \\
3x=2 & \vee & -x=8 \\
x=\frac{2}{3} & \vee & x=-8
\end{array}$$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S=\{\frac{2}{3},-8\}}$.

Esempio 7

$$\mathbf{\left|x^2+x-2\right|+x-1=0}$$

$|x^2+x-2|=1-x\,;$

Applicando la regola 4 si ha:

$\begin{cases} x^2+x-2\geq 0 \\ +(x^2+x-2)=1-x \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} x^2+x-2<0 \\ -(x^2+x-2)=1-x \end{cases}$
$\begin{cases} x\leq -2 \quad \vee \quad x\geq 1 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} -2<x<1 \\ x^2-1=0 \end{cases}$
$\begin{cases} x\leq -2 \quad \vee \quad x\geq 1 \\ x_1=-3 \qquad accettabile \\ x_2=+1 \qquad accettabile \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} -2<x<1 \\ x_3=-1 \qquad accettabile \\ x_4=+1 \qquad non\ accettabile \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S=\{-3\,,-1\,,+1\,\}}$

Risolvo: $x^2+x-2\geq 0\,; \qquad x\leq -2 \quad \vee \quad x\geq 1$

$$x^2+x-2=0\,; \qquad \Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9\,; \qquad x_{1,2}=\frac{-1\mp\sqrt{9}}{2\cdot 1}= \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1-3}{2}=-\dfrac{4}{2}=-2 \\ x_2=\dfrac{-1+3}{2}=+\dfrac{2}{2}=+1 \end{array}$$

Risolvo: $x^2+2x-3=0\,; \qquad \frac{\Delta}{4}=1^2-1\cdot(-3)=1+3=4\,; \qquad x_{1,2}=\frac{-1\mp\sqrt{4}}{1}= \begin{array}{l} x_1=-1-2=-3 \\ x_2=-1+2=+1 \end{array}$

Esempio 7 bis

$$\mathbf{\left|x^2+x-2\right|+x-1=0}$$

$|x^2+x-2|=1-x\,;$

Conviene applicare la regola 5 anziché la regola 4.

$\begin{cases} 1-x\ \geq 0 \\ +(x^2+x-2)=1-x \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} 1-x\ \geq 0 \\ -(x^2+x-2)=1-x \end{cases}$
$\begin{cases} x\leq 1 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} x\leq 1 \\ x^2-1=0 \end{cases}$
$\begin{cases} x\leq 1 \\ x_1=-3 \qquad accettabile \\ x_2=+1 \qquad accettabile \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} x\leq 1 \\ x_1=-1 \qquad accettabile \\ x_2=+1 \qquad accettabile \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S=\{-3\,,-1\,,+1\,\}}$

Esempio 8

$$\mathbf{|\,|x-1|-3|=5}$$

$\|x-1\|-3=-5$	$\vee$	$\|x-1\|-3=+5$
$\|x-1\|=-2$		$\|x-1\|=8$
Equazione impossibile		$x-1=-8 \quad \vee \quad x-1=+8\,;$ $x=-7 \quad \vee \quad x=9\,;$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S=\{\,-7\,,9\,\}}$.

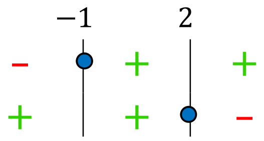
Esempio 9

$|x+1|+|4-2x|=6$

Si studiano i segni delle espressioni in valore assoluto :

$x+1\geq 0 \qquad x\geq -1$

$4-2x\geq 0 \qquad x\leq 2$



Dall'esame dei segni si ottengono tre sistemi :

$$\begin{cases} x<-1 \\ -(x+1)+(4-2x)=6 \end{cases} \cup \begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ +(x+1)+(4-2x)=6 \end{cases} \cup \begin{cases} x>2 \\ +(x+1)-(4-2x)=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-1 \\ -x-1+4-2x=6 \end{cases} \cup \begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ x+1+4-2x=6 \end{cases} \cup \begin{cases} x>2 \\ x+1-4+2x=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-1 \\ -3x=3 \end{cases} \cup \begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ -x=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x>2 \\ 3x=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-1 \\ x=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ x=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x>2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\phi \qquad \cup \qquad x=-1 \qquad \cup \qquad x=3.$$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{-1}\,,\mathbf{3}\}$.