EQUAZIONI IRRAZIONALI

con radicali con indice dispari

$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = [B(x)]^n$

$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = B(x)$

Esempio 1

$\boldsymbol{\sqrt[3]{x^3 - x} = x - 1}$; $\quad x^3 - x = (x-1)^3$; $\quad x^3 - x = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

$3x^2 - 4x + 1 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1$; $\quad x_{1,2} = \frac{2 \mp 1}{3} = \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{array}$

Esempio 2

$\boldsymbol{\sqrt[5]{3x - 8} = \sqrt[5]{2x - 3}}$; $\quad 3x - 8 = 2x - 3$; $\quad x = 5$.

EQUAZIONI IRRAZIONALI

con radicali con indice pari

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = k \quad (k \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = k^n$$

$$\sqrt[n]{A(x)} = k \quad (k < 0) \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\, x \in R$$

Quando invece figurano due o più radicali occorre:

1. determinare le condizioni di esistenza dei radicali di indice pari (radicandi ≥ 0);
2. spostare, se è possibile, i termini da un membro all'altro, in modo da ottenere un'equazione in cui i due membri sono non negativi;
3. imporre le condizioni di concordanza di segno

Esempio 1

$\boldsymbol{\sqrt[2]{x+1} = 5 - x}$; $\quad \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 = (5-x)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x \geq -5 \\ x + 1 = 25 + x^2 - 10x \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 = 0 \end{cases}$

$\mathit{Risolvo} \;\; x^2 - 11x + 24 = 0$; $\quad \Delta = 121 - 96 = 25$; $\quad x_{1,2} = \dfrac{11 \mp 5}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 \quad \mathit{accettabile} \\ x_2 = 8 \quad \mathit{non\ accettabile} \end{matrix}$

Esempio 2

$\boldsymbol{\sqrt[4]{3x-8} = \sqrt[4]{x^2 - 6x}}$; $\quad \begin{cases} 3x - 8 \geq 0 \\ 3x - 8 = x^2 - 6x \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \dfrac{8}{3} \\ x^2 - 9x + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \dfrac{8}{3} \\ x_1 = 1 \quad \mathit{non\ accettabile} \\ x_2 = 8 \quad \mathit{accettabile} \end{cases}$

Esempio 3

$\boldsymbol{\sqrt[2]{2-x} = 3}$; $\qquad 2 - x = 3^2$; $\qquad x = -7$.

Esempio 4

$\boldsymbol{\sqrt[2]{2-x} = -3}$; $\qquad \nexists\, x \in R$.

Esempio 5

$\boldsymbol{\sqrt[2]{2x} - \sqrt[2]{x+7} = -1}$; $\quad$ Le condizioni di esistenza sono: $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x + 7 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -7 \end{cases} \quad x \geq 0 \quad (1)$

Per evitare che negli elevamenti al quadrato si introducano soluzioni estranee, riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la positività di entrambi i membri.

$\sqrt[2]{2x} + 1 = \sqrt[2]{x+7}$; elevando al quadrato entrambi i membri $\left(\sqrt{2x} + 1\right)^2 = \left(\sqrt[2]{x+7}\right)^2$ si ottiene:

$2x + 1 + 2\sqrt{2x} = x + 7$; $\qquad 2\sqrt{2x} = 6 - x$; questa equazione è del primo tipo (*primo esempio*).

$\begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ \left(2\sqrt{2x}\right)^2 = (6-x)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 6 \\ 8x = 36 + x^2 - 12x \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 6 \quad (2) \\ x^2 - 20x + 36 = 0 \end{cases}$

Risolvo $x^2 - 20x + 36 = 0$; $\quad \dfrac{\Delta}{4} = 100 - 36 = 64$; $\quad x_{1,2} = 10 \mp 8 = \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 18 \end{matrix}$

Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare sia le condizioni di esistenza (1) , sia la condizione di concordanza di segno (2) .

Ossia: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 6 \qquad$ Pertanto soltanto la soluzione $x_1 = 2$ è accettabile.

Esempio 6

$\sqrt[2]{\boldsymbol{x}} - \sqrt[2]{\boldsymbol{x+5}} = -\sqrt[2]{\boldsymbol{x-3}}$; Le condizioni di esistenza sono: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -5 \\ x \geq 3 \end{cases}$ $x \geq 3$ (1)

Per evitare che negli elevamenti al quadrato si introducano soluzioni estranee, riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la positività di entrambi i membri.

$\sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{x-3} = \sqrt[2]{x+5}$; elevando ambo i membri al quadrato si ha:

$\left(\sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{x-3}\right)^2 = \left(\sqrt[2]{x+5}\right)^2$; $x + x - 3 + 2\sqrt[2]{x \cdot (x-3)} = x + 5$;

$2\sqrt{x^2 - 3x} = 8 - x$; risolviamo questa equazione come nell'esempio 1.

$\begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ \left(2\sqrt{x^2-3x}\right)^2 = (8-x)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 8 \\ 4(x^2 - 3x) = 64 + x^2 - 16x \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 8 \\ 4x^2 - 12x = 64 + x^2 - 16x \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 8 \\ 3x^2 + 4x - 64 = 0 \end{cases}$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+192}}{3} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{196}}{3} = \dfrac{-2 \pm 14}{3} =$ $x_1 = \dfrac{-2-14}{3} = -\dfrac{16}{3}$; $x_2 = \dfrac{-2+14}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$

$\begin{cases} x \leq 8 \\ x_1 = -\dfrac{16}{3} \quad \vee \quad x_2 = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x_1 = -\dfrac{16}{3} \quad \vee \quad x_2 = 4$

Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare le condizioni di esistenza (1) .

Pertanto la soluzione $x_2 = 4$ è accettabile, mentre la soluzione $x_1 = -\frac{16}{3}$ non è accettabile.

In conclusione, l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S = \{4\}$

Esempio 7

$\boldsymbol{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+5} = -3}$

Riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la concordanza di segno:

$\sqrt{x+2} + 3 = 2\sqrt{x+5}$

Le condizioni di esistenza dell'equazione sono: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -5 \end{cases}$ $x \geq -2$ $(*)$

Sotto queste condizioni, elevando ambo i membri al quadrato, si ottiene:

$\left(\sqrt{x+2} + 3\right)^2 = \left(2\sqrt{x+5}\right)^2$; $x + 2 + 9 + 6\sqrt{x+2} = 4(x+5)$;

$6\sqrt{x+2} = 4x + 20 - x - 2 - 9$; $6\sqrt{x+2} = 3x + 9$;

$2\sqrt{x+2} = x + 3$;

Risolviamo tale equazione imponendo la condizione di concordanza di segno: $x + 3 \geq 0$

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \left(2\sqrt{x+2}\right)^2 = (x+3)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ 4(x+2) = x^2 + 9 + 6x \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ 4x + 8 = x^2 + 9 + 6x \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1 \end{cases}$ $x = -1$

La soluzione $\boxed{\boldsymbol{x = -1}}$ è accettabile perché soddisfa le condizioni di esistenza $(*)$ $x \geq -2$.