

# Equazioni di grado superiore al II°

## Equazioni binomie

Un'equazione binomia è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo  $ax^n + b = 0$ .

Per risolvere una tale equazione, volendo cercare anche le soluzioni complesse, occorre:

- scomporre l'equazione in fattori
- applicare la legge dell'annullamento del prodotto.

Osservazione:

Se l'esponente  $n$  è pari, ed  $a$  e  $b$  sono discordi, ha due soluzioni reali ed opposte, le altre sono complesse.

Se l'esponente  $n$  è pari, ed  $a$  e  $b$  sono concordi, l'equazione ha solo soluzioni complesse.

Se l'esponente  $n$  è dispari, ha sempre una sola soluzione reale, le altre sono complesse.

### Esempio 1

$$5x^3 - 40 = 0; \quad x^3 - 8 = 0; \quad (x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4) = 0; \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \end{array} \quad \boxed{x_1 = 2}$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1 - 4 = -3 \quad x_{2,3} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{1} = -1 \pm \sqrt{-3} = \boxed{-1 \pm i\sqrt{3}}$$

### Esempio 2

$$2x^3 + 54 = 0; \quad x^3 + 27 = 0; \quad (x+3) \cdot (x^2 - 3x + 9) = 0; \quad \begin{array}{l} x+3=0 \\ x^2 - 3x + 9 = 0 \end{array} \quad \boxed{x_1 = -3}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 36 = -27 \quad x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{-3}}{2} = \boxed{\frac{3}{2} \pm i\frac{3}{2}\sqrt{3}}$$

### Esempio 3

$$3x^4 - 48 = 0; \quad x^4 - 16 = 0; \quad (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = 0; \quad \begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 4 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = \pm\sqrt{4} \\ x_2 = \pm\sqrt{-4} \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} = \pm 2 \\ = \pm 2i \end{array}}$$

### Esempio 4

$$3x^6 - 192 = 0; \quad x^6 - 64 = 0; \quad (x^3 + 8) \cdot (x^3 - 8) = 0; \quad \begin{array}{l} x+2=0 \\ x-2=0 \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \\ x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{3} \\ x_{5,6} = 1 \pm i\sqrt{3} \end{array}}$$

## Equazioni trinomie

Un'equazione trinomia è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$  con  $a \neq 0$  e  $n \in \mathbb{N}$

Per risolvere una tale equazione occorre:

- porre  $x^n = z$
- risolvere l'equazione di II° grado ottenuta  $az^2 + bz + c = 0$
- sostituire le soluzioni trovate  $z_1$  e  $z_2$  in  $x^n = z$  e ricavare le soluzioni  $x_1, x_2, x_3, \dots$

### Esempio

$$8x^6 - 15x^3 - 2 = 0$$

Si pone  $x^3 = z$ ;  $8z^2 - 15z - 2 = 0$ ;  $\Delta = b^2 - 4ac = 225 + 64 = 289$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{16} = \frac{15 \pm 17}{16} = z_1 = -\frac{1}{8}$$
$$z_2 = 2$$

$$z_1 = -\frac{1}{8}; \quad x^3 = -\frac{1}{8}; \quad x^3 + \frac{1}{8} = 0; \quad \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 0$$
$$x_1 + \frac{1}{2} = 0 \quad \boxed{x_1 = -\frac{1}{2}}$$
$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$4x^2 - 2x + 1 = 0; \quad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1 - 4 = -3; \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{4} = \boxed{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}}$$

$$z_2 = 2; \quad x^3 = 2; \quad x^3 - 2 = 0; \quad (x - \sqrt[3]{2}) \cdot (x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = 0$$
$$x_1 - \sqrt[3]{2} = 0 \quad \boxed{x_4 = \sqrt[3]{2}}$$
$$x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4} = 0$$

$$x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4} = 0; \quad \Delta = b^2 - 4ac = \sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$$

$$x_{5,6} = \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{4}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{2} \pm i\sqrt{\sqrt[3]{108}}}{2} = \boxed{\frac{-\sqrt[3]{2} \pm i\sqrt[6]{108}}{2}}$$

## Equazioni reciproche

Un'equazione reciproca è un'equazione che, ridotta a forma normale, ha i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi, uguali od opposti,

cioè del tipo  $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0$

L'equazione reciproca si dice di **I<sup>a</sup> specie** quando i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi sono uguali.

L'equazione reciproca si dice di **II<sup>a</sup> specie** quando i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi sono opposti..

Un'equazione reciproca ammette sempre soluzioni reciproche  $\left( \text{Esempio: } \frac{3}{4} \text{ e } \frac{4}{3} \right)$ .

## Equazioni reciproche di III° grado di I<sup>a</sup> specie

Un'equazione reciproca di terzo grado di I<sup>a</sup> specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo  $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ . Essa ammette sempre almeno la soluzione  $x = -1$ .

Per risolvere una tale equazione occorre:

- scomporre l'equazione in fattori (*Raccoglimento a fattor comune parziale oppure Metodo di Ruffini*)
- applicare la legge dell'annullamento del prodotto

### Esempio

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

Si applica il Metodo di Ruffini:

-1	2	-3	-3	2
		-2	5	-2
	2	-5	2	=

l'equazione si scompone in :

$$(x+1) \cdot (2x^2 - 5x + 2) = 0; \quad x+1=0 \quad \boxed{x_1 = -1}$$
$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9; \quad x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \boxed{x_2 = \frac{1}{2}}$$
$$\boxed{x_3 = 2}$$

## Equazioni reciproche di III° grado di II<sup>a</sup> specie

Un'equazione reciproca di terzo grado di II<sup>a</sup> specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo  $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ . Essa ammette sempre almeno la soluzione  $x = 1$ .

Per risolvere una tale equazione occorre:

- scomporre l'equazione in fattori (*Raccoglimento a fattor comune parziale oppure Metodo di Ruffini*)
- applicare la legge dell'annullamento del prodotto

### Esempio

$$6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$$

Si applica il Metodo di Ruffini:

1	6	-19	19	-6
		6	-13	6
	6	-13	6	=

l'equazione si scompone in :

$$(x-1) \cdot (6x^2 - 13x + 6) = 0; \quad x-1=0 \quad \boxed{x_1 = 1}$$
$$6x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 144 = 25; \quad x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} = \boxed{x_1 = \frac{2}{3}}$$
$$\boxed{x_2 = \frac{3}{2}}$$

## Equazioni reciproche di IV° grado di Iª specie

Un'equazione reciproca di quarto grado di Iª specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Essa si risolve come nell'esempio seguente.

### Esempio

$$3x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 15x + 3 = 0$$

Non essendo  $x = 0$  soluzione dell'equazione si dividono tutti i termini per  $x^2$  :

$$3x^2 - 15x + 6 - \frac{15}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$$

Si raccolgono i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi :

$$3 \cdot \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 15 \cdot \left( x + \frac{1}{x} \right) + 6 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Si pone } x + \frac{1}{x} = z \quad \Rightarrow \quad z^2 = \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \quad \text{cioè} \quad z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\text{Da cui si ottiene } z^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Sostituendo nell'equazione (\*)  $x + \frac{1}{x} = z$  e  $z^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$  si ha:

$$3 \cdot (z^2 - 2) - 15z + 6 = 0; \quad 3z^2 - 6 - 15z + 6 = 0; \quad 3z^2 - 15z = 0; \quad z \cdot (z - 5) = 0; \quad \begin{matrix} z_1 = 0 \\ z_2 = 5 \end{matrix}$$

Sostituendo in  $x + \frac{1}{x} = z$  si ha:

$$x + \frac{1}{x} = z_1; \quad x + \frac{1}{x} = 0; \quad x^2 + 1 = 0; \quad x^2 = -1; \quad x_{1,2} = \pm i$$

$$x + \frac{1}{x} = z_2; \quad x + \frac{1}{x} = 5; \quad x^2 + 1 = 5x; \quad x^2 - 5x + 1 = 0; \quad \Delta = 25 - 4 = 21; \quad x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

## Equazioni reciproche di IV° grado di IIª specie

Un'equazione reciproca di quarto grado di IIª specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:  
 $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$ . Essa ammette sempre almeno le soluzioni  $x_{1,2} = \pm 1$ .

Per risolvere una tale equazione occorre:

- scomporre l'equazione in fattori (*Raccoglimento a fattor comune parziale oppure Metodo di Ruffini*)
- applicare la legge dell'annullamento del prodotto

### Esempio

$$3x^4 - 15x^3 + 15x - 3 = 0$$

#### Metodo 1

Si applica il Metodo di Ruffini, con  $x = 1$ :

l'equazione si scompone in :

$$(x-1) \cdot (3x^3 - 12x^2 - 12x + 3) = 0;$$

1	3	-15	0	15	-3
		+3	-12	-12	+3
	3	-12	-12	3	=

Si applica, di nuovo, il Metodo di Ruffini, con  $x = -1$ :

l'equazione si scompone in :

-1	3	-12	-12	+3
		-3	+15	-3
	3	-15	+3	=

$$(x-1) \cdot (x+1) \cdot (3x^2 - 15x + 3) = 0;$$

$x-1=0$   
 $x+1=0$   
 $3x^2 - 15x + 3 = 0$

$x_1 = 1$   
 $x_2 = -1$

$$3x^2 - 15x + 3 = 0; \quad \Delta = 225 - 36 = 189; \quad x_{3,4} = \frac{15 \pm \sqrt{189}}{6} = \frac{15 \pm 3\sqrt{21}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

#### Metodo 2

$$3x^4 - 15x^3 + 15x - 3 = 0$$

Si raccolgono i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi :

$$3 \cdot (x^4 - 1) - 15x \cdot (x^2 - 1) = 0; \quad 3 \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) - 15x \cdot (x^2 - 1) = 0;$$

$$(x^2 - 1) \cdot [3 \cdot (x^2 + 1) - 15x] = 0; \quad (x^2 - 1) \cdot [3x^2 + 3 - 15x] = 0;$$

$$(x^2 - 1) \cdot (3x^2 - 15x + 3) = 0; \quad \begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ 3x^2 - 15x + 3 = 0 \end{array} \quad \boxed{x_{1,2} = \pm 1}$$

$$3x^2 - 15x + 3 = 0; \quad \Delta = 225 - 36 = 189; \quad x_{3,4} = \frac{15 \pm \sqrt{189}}{6} = \frac{15 \pm 3\sqrt{21}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

## Equazioni reciproche di V° grado di I<sup>a</sup> specie

Un'equazione reciproca di quinto grado di I<sup>a</sup> specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:  
 $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ . Essa ammette sempre almeno la soluzione  $x = -1$

Per risolvere una tale equazione occorre:

- scomporre l'equazione in fattori di I° e II° grado
- applicare la legge dell'annullamento del prodotto

Vediamo questo metodo con il seguente esempio.

### Esempio

$$3x^5 - 12x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 12x + 3 = 0$$

-1	3	-12	-9	-9	-12	+3
		-3	+15	-6	+15	-3
	3	-15	+6	-15	+3	=

Si applica il metodo di Ruffini e si ottiene:

$$(x+1) \cdot (3x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 15x + 3) = 0; \quad x+1=0 \quad \boxed{x_1 = -1}$$
$$3x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 15x + 3 = 0$$

La seconda equazione è un'equazione reciproca di IV° grado

di I° specie, già risolta precedentemente e che da le soluzioni:

$$\boxed{x_{3,4} = \pm i}$$

$$\boxed{x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}$$

## Equazioni reciproche di V° grado di II<sup>a</sup> specie

Un'equazione reciproca di quinto grado di II<sup>a</sup> specie è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:  
 $ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$ . Essa ammette sempre almeno la soluzione  $x = +1$

Per risolvere una tale equazione occorre:

- scomporre l'equazione in fattori di I° e II° grado
- applicare la legge dell'annullamento del prodotto

Vediamo questo metodo con il seguente esempio.

### Esempio

$$3x^5 - 18x^4 + 21x^3 - 21x^2 + 18x - 3 = 0$$

+1	3	-18	+21	-21	+18	-3
		+3	-15	+6	-15	+3
	3	-15	+6	-15	+3	=

Si applica il metodo di Ruffini e si ottiene:

$$(x-1) \cdot (3x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 15x + 3) = 0; \quad x-1=0 \quad \boxed{x_1 = +1}$$
$$3x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 15x + 3 = 0$$

La seconda equazione è un'equazione reciproca di IV° grado

di I° specie, già risolta precedentemente e che da le soluzioni:

$$\boxed{x_{3,4} = \pm i}$$

$$\boxed{x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}$$

## Equazioni di grado superiore al II° generiche

Una generica equazione di grado superiore al II° è un'equazione che non rientra nella casistica esaminata precedentemente.

Per risolvere una tale equazione occorre:

- scomporre l'equazione in fattori di I° e II° grado
- applicare la legge dell'annullamento del prodotto

Vediamo questo metodo con il seguente esempio.

### Esempio

$$6x^7 - 51x^6 + 114x^5 - 45x^4 = 0$$

$$6x^7 - 51x^6 + 114x^5 - 45x^4 = 0;$$

$$2x^4 \cdot (2x^3 - 17x^2 + 38x - 15) = 0$$

	2	-17	+38	-15
$\frac{1}{2}$		+1	-8	+15
	2	-16	+30	=

Si applica il Metodo di Ruffini:

Si trovano i divisori del termine noto  $D_{15} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

Si trovano i divisori del I° coefficiente  $D_2 = \{\pm 1, \pm 2\}$

Si trovano tutte le combinazioni di frazioni con i divisori del termine noto al numeratore, e i divisori del I° coefficiente a denominatore  $D_{\frac{N}{D}} = \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 5, \pm \frac{5}{2}, \pm 15, \pm \frac{15}{2} \right\}$

L'equazione pertanto si scompone :

$$2x^4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) (2x^2 - 16x + 30) = 0;$$

$2x^4 = 0$   
 $x - \frac{1}{2} = 0$   
 $2x^2 - 16x + 30 = 0$

$x_{1,2,3,4} = 0$  (contata 4 volte)  
 $x_5 = \frac{1}{2}$

$$(2x^2 - 16x + 30) = 0; \quad \frac{\Delta}{4} = 64 - 60 = 4; \quad x_{6,7} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{matrix} x_6 = 3 \\ x_7 = 5 \end{matrix}$$