Equazioni letterali fratte di II° grado

Un'equazione letterale fratta è un'equazione fratta che contiene, oltre la lettera che rappresenta l'incognita dell'equazione, altre lettere, dette parametri, che rappresentano numeri ben determinati, cioè aventi valore costante ma non indicato.

La risoluzione di un'equazione letterale fratta, detta discussione, consiste nel determinare come variano le sue soluzioni al variare dei valori assunti dai parametri che in essa compaiono.

Per risolvere un'equazione letterale fratta occorre:

1. Scomporre in fattori i denominatori e calcolare il m.c.m.
2. Determinare le condizioni di esistenza, cioè quei valori dei parametri che fanno perdere di significato l'equazione (per tali valori non ha senso risolvere l'equazione)
3. Determinare le condizioni di accettabilità delle incognite. Tali condizioni sono utilizzate nella fase finale della discussione per stabilire l'accettabilità delle soluzioni trovate.
4. Ridurre l'equazione a forma normale e studiare i vari casi:

   equazione che si riduce a I° grado
   equazione completa con $\Delta > 0$
   equazione completa con $\Delta = 0$
   equazione completa con $\Delta < 0$
5. Discutere le soluzioni trovate confrontandole con le condizioni di accettabilità delle incognite *(punto3)*
6. Effettuare il riepilogo finale.

Esercizio 270.428

$$\frac{a+2}{x^2-x+ax-a}+\frac{1}{x-1}=2$$

<u>*Soluzione*</u>

$\frac{a+2}{x(x-1)+a(x-1)}+\frac{1}{x-1}=2\ ;$ $\qquad C.E.:\ x\neq 1\ \wedge\ x\neq -a$

$\frac{a+2}{(x-1)(x+a)}+\frac{1}{x-1}=2\ ;$ $\qquad m.c.m.=(x-1)(x+a)$

$a+2+1\cdot(x+a)=2\cdot(x-1)(x+a)\ ;$

$a+2+x+a=2\cdot(x^2-x+ax-a)\ ;$ $\qquad a+2+x+a=2x^2-2x+2ax-2a\ ;$

$a+2+x+a-2x^2+2x-2ax+2a=0\ ;$ $\qquad -2x^2+(1+2-2a)x+4a+2=0\ ;$

$2x^2+(2a-3)x-4a-2=0\ ;$ $\qquad A=2\,;\quad B=2a-3\,;\quad C=-4a-2$

Essendo $A=2$, *l'equazione non è mai di I grado.*

$\Delta\ =\ B^2-4\cdot A\cdot C\ =\ (2a-3)^2-4\cdot 2\cdot(-4a-2)\ =\ 4a^2+9-12a+32a+16\ =$

$\quad =\ 4a^2+20a+25\ =\ (2a+5)^2\,.$

$\Delta<0\,;\quad (2a+5)^2<0\quad \nexists\, a\ \in R\,.$

$\Delta=0\,;\quad (2a+5)^2=0\,;\quad a=-\frac{5}{2}\quad \Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{-(2a-3)\mp\sqrt{0}}{2\cdot 2}=\frac{-\left(2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-3\right)}{4}$

$\qquad =\frac{-(-5-3)}{4}=\frac{8}{4}=2\ .$

$\Delta>0\,;\quad (2a+5)^2>0\,;\quad \forall\, a\neq-\frac{5}{2}\quad \Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{-(2a-3)\mp\sqrt{(2a+5)^2}}{2\cdot 2}=$

$$=\frac{-(2a-3)\mp(2a+5)}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{-2a+3-2a-5}{4}=\frac{-4a-2}{4}=-a-\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{-2a+3+2a+5}{4}=\frac{8}{4}=2\end{cases}$$

Tali soluzioni sono accettabili se verificano le condizioni di accettabilità $x\neq 1\ \wedge\ x\neq -a$

$x_1\neq 1\,;\qquad -a-\frac{1}{2}\neq 1\,;\qquad -a\neq 1+\frac{1}{2}\,;\qquad a\neq-\frac{3}{2}\ .$

$x_2\neq 1\,;\qquad 2\neq 1\,;\qquad \forall a\in R\ .$

$x_1\neq -a\,;\qquad -a-\frac{1}{2}\neq -a\,;\qquad -\frac{1}{2}\neq 0\,;\qquad \forall a\in R\ .$

$x_2\neq -a\,;\qquad 2\neq -a\,;\qquad a\neq -2\ .$

Se $a=-\frac{3}{2}$ $\quad x_1=-a-\frac{1}{2}=-\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$ $\qquad$ *non accettabile*

$\qquad x_2=2$ $\qquad$ *accettabile*

Se $a=-2$ $\quad x_1=-a-\frac{1}{2}=-(-2)-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ $\qquad$ *accettabile*

$\qquad x_2=2$ $\qquad$ *non accettabile*

$x_2=2$ *non è accettabile perchè (per le* $C.E.$*) deve essere* $x\neq -a$ *(ma* $a=-2$*) cioè* $x\neq 2$.

Riepilogando:

Parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$\nexists\, a \in R$	*Equazione di I° grado*	-
$\nexists\, a \in R$	*Equazione Completa con* $\Delta < 0$	-
$a = -\frac{5}{2}$	*Equazione Completa con* $\Delta = 0$	$x_{1,2} = 2$
$a \neq -\frac{5}{2} \wedge a \neq -\frac{3}{2} \wedge a \neq -2$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	*Due soluzioni reali e distinte* $x_1 = -a - \frac{1}{2} \wedge x_2 = 2$
$a = -\frac{3}{2}$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	*È accettabile solo la seconda soluzione* $x_2 = 2$
$a = -2$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	*È accettabile solo la prima soluzione* $x_1 = \frac{3}{2}$

Esercizio 270.432

$$\frac{6a^2}{x^2-a^2}+\frac{6a^2}{x^2-x+ax-a}=\frac{(3a-1)x}{x^2-x-ax+a} \qquad C.E.: \; x\neq +a \;\wedge\; x\neq -a \;\wedge\; x\neq 1$$

<u>*Soluzione*</u>

$$\frac{6a^2}{(x+a)(x-a)}+\frac{6a^2}{(x-1)(x+a)}=\frac{(3a-1)x}{(x-1)(x-a)} \; ; \qquad m.c.m.=(x+a)(x-a)(x-1)$$

$6a^2(x-1)+6a^2(x-a)=(x+a)(3ax-x)$;

$6a^2x-6a^2+6a^2x-6a^3=3ax^2-x^2+3a^2x-ax$;

$6a^2x-6a^2+6a^2x-6a^3-3ax^2+x^2-3a^2x+ax=0$;

$(1-3a)x^2+(6a^2+6a^2-3a^2+a)x-6a^2-6a^3=0$;

$(1-3a)x^2+(9a^2+a)x-6a^2-6a^3=0$; $\qquad A=1-3a\,;\quad B=9a^2+a\,;\quad C=-6a^2-6a^3$

Se $a=\frac{1}{3}$ *l'equazione è di I grado. La soluzione è:* $\left[9\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right]x-6\left(\frac{1}{3}\right)^2-6\left(\frac{1}{3}\right)^3=0$;

$\left[1+\frac{1}{3}\right]x-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=0$; $\quad \frac{4}{3}x-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=0$; $\quad 12x-6-2=0$; $\quad 12x=8$; $\quad x=\frac{2}{3}$.

$\Delta = B^2-4\cdot A\cdot C = (9a^2+a)^2-4(1-3a)(-6a^2-6a^3) =$

$=81a^4+a^2+18a^3-4(-6a^2-6a^3+18a^3+18a^4) =$

$=81a^4+a^2+18a^3+24a^2+24a^3-72a^3-72a^4 =$

$=9a^4-30a^3+25a^2 = a^2(9a^2-30a+25) = a^2(3a-5)^2$.

$\Delta<0$; $\quad a^2(3a-5)^2<0 \quad \nexists\, a\in R$.

$\Delta=0$; $\quad a^2(3a-5)^2=0$; $\quad \begin{matrix} a=0 \\ a=\frac{5}{3}\end{matrix}$

Se $a=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{-9a^2-a}{2\cdot(1-3a)}=\frac{0}{2}=0$ $\qquad$ *Valore non accettabile,*

perchè (per le C.E.) deve essere $x\neq a$ (*ma* $a=0$) *cioè* $x\neq 0$.

Se $a=\frac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{-9a^2-a}{2\cdot(1-3a)}=\frac{-9\left(\frac{5}{3}\right)^2-\frac{5}{3}}{2\cdot\left(1-3\cdot\frac{5}{3}\right)}=\frac{-25-\frac{5}{3}}{2\cdot(1-5)}=\frac{\frac{-75-5}{3}}{-8}=\frac{80}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{10}{3}$

$\Delta>0$; $\quad a^2(3a-5)^2>0$; $\quad a\neq 0 \;\wedge\; a\neq\frac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{-9a^2-a\mp\sqrt{a^2(3a-5)^2}}{2\cdot(1-3a)}=$

$$=\frac{-9a^2-a\mp a(3a-5)}{2\cdot(1-3a)}= \begin{cases} x_1=\frac{-9a^2-a-3a^2+5a}{2\cdot(1-3a)}=\frac{4a-12a^2}{2\cdot(1-3a)}=\frac{4a(1-3a)}{2\cdot(1-3a)}=2a \\ x_2=\frac{-9a^2-a+3a^2-5a}{2\cdot(1-3a)}=\frac{-6a-6a^2}{2\cdot(1-3a)}=\frac{-6a(1+a)}{2\cdot(1-3a)}=\frac{3a+3a^2}{3a-1}\end{cases}$$

Tali soluzioni sono accettabili se verificano le condizioni di accettabilità $x\neq +a \;\wedge\; x\neq -a \;\wedge\; x\neq 1$

$x_1\neq +a$; $\quad 2a\neq +a$; $\quad a\neq 0$.

$x_1\neq -a$; $\quad 2a\neq -a$; $\quad 3a\neq 0$; $\quad a\neq 0$.

$x_1\neq 1$; $\quad 2a\neq 1$; $\quad a\neq\frac{1}{2}$.

$x_2\neq +a$; $\quad \frac{3a+3a^2}{3a-1}\neq +a$; $\quad 3a+3a^2\neq 3a^2-a$; $\quad 4a\neq 0$; $\quad a\neq 0$.

$x_2\neq -a$; $\quad \frac{3a+3a^2}{3a-1}\neq -a$; $\quad 3a+3a^2\neq -3a^2+a$; $\quad 6a^2+2a\neq 0$; $\quad 2a(3a+1)\neq 0$; $\quad \begin{matrix} a\neq 0 \\ a\neq -\frac{1}{3}\end{matrix}$.

$x_2\neq 1$; $\quad \frac{3a+3a^2}{3a-1}\neq 1$; $\quad 3a+3a^2\neq 3a-1$; $\quad 3a^2\neq -1$; $\quad \forall\, a\in R$.

$$x_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \qquad non\ accettabile$$

$$Se\ a = +\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3 \cdot \frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{6+3}{4}}{\frac{3-2}{2}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{9}{2} \quad accettabile\ .$$

$$x_1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \qquad accettabile$$

$$Se\ a = -\frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1} = \frac{-1 + \frac{1}{3}}{-1 - 1} = \frac{-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad non\ accettabile\ perchè\ \ x \neq -a;\ x \neq \frac{1}{3}\ .$$

Parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$\nexists\ a \in R$	*Perde significato*	-
$a = \frac{1}{3}$	*Equazione di I° grado*	$x = \frac{2}{3}$
$\nexists\ a \in R$	*Equazione Completa con* $\Delta < 0$	-
$a = 0$	*Equazione Completa con* $\Delta = 0$	*Nessuna soluzione reale* *Equazione impossibile*
$a = \frac{5}{3}$		$x_{1,2} = \frac{10}{3}$
$a \neq 0\ \wedge\ a \neq \frac{5}{3}\ \wedge\ a \neq \frac{1}{2}\ \wedge\ a \neq \pm\frac{1}{3}$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	*Due soluzioni reali e distinte* $x_1 = 2a \quad \wedge \quad x_2 = \frac{3a + 3a^2}{3a - 1}$
$a = +\frac{1}{2}$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	*È accettabile solo la seconda soluzione* $x_2 = \frac{9}{2}$
$a = -\frac{1}{3}$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	*È accettabile solo la prima soluzione* $x_1 = -\frac{2}{3}$

Esempio 1

$$\frac{x^2 - x(b-a)}{x-b} + \frac{ab}{b-x} = 0$$

L'equazione si può scrivere:

$$\frac{x^2 - x(b-a)}{x-b} - \frac{ab}{x-b} = 0$$

Condizione di accettabilità: $x \neq b$.

Moltiplicando per il $m.c.m. = x - b \neq 0$ *si ha:*

$\boxed{x^2 - (b-a)x - ab = 0}$; $A = 1$ $B = -(b-a)$ $C = ab$

Essendo $A = 1$ *l'equazione non è mai di I° grado.*

$\Delta = (b-a)^2 + 4ab = b^2 + a^2 - 2ab + 4ab = b^2 + a^2 + 2ab = (b+a)^2$

$\Delta > 0$ *per* $b + a \neq 0$ *cioè* $a \neq -b$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b - a \mp \sqrt{(b+a)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{b - a \mp (b+a)}{2} = \begin{array}{l} x_1 = \frac{b-a-b-a}{2} = -a \\ x_2 = \frac{b-a+b+a}{2} = b \end{array}$$

$x_1 = -a$ è accettabile se essa è diversa da b, cioè se $a \neq -b$

$x_2 = b$ *non è accettabile perché non verifica la condizione di accettabilità discussa all'inizio.*

$\Delta = 0$ *per* $a = -b \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b + b \mp \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{2b}{2} = b$ *non è accettabile perché non soddisfa la condizione di accettabilità discussa all'inizio.*

Riepilogando:

Valore del parametro	Tipo di equazione	Soluzioni
$a = -b$	*Equazione impossibile*	
$a \neq -b$	*Equazione completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = -a$

Esempio 2

$$\frac{x^2}{a^2} = x^2 - \frac{2x}{a^2}$$

Condizione di esistenza: $a \neq 0$. *Per* $a = 0$ *l'equazione perde significato*

Condizione di accettabilità: $\forall x \in R$

Riduzione a forma normale:
moltiplicando per: $a \neq 0$ *si ha:* $x^2 = a^2x^2 - 2x$; $\boxed{(1 - a^2)x^2 + 2x = 0}$

Discussione:
Per $1 - a^2 = 0$ *cioè:* $a = -1$ *oppure* $a = 1$ *si ha:* $2x = 0$; $x = 0$.

Per $1 - a^2 \neq 0$ *si ha:* $x \cdot [(1 - a^2)x + 2] = 0$; $x = 0$; $x = \frac{2}{a^2-1}$

$\Delta = 4 > 0 \quad \forall\, a \in R$

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a = 0$	*Equazione che perde significato*	
$a = -1$ *oppure* $a = 1$	*Equazione di I° grado determinata*	$x = 0$
$a \neq 0$ *e* $a \neq -1$ *e* $a \neq 1$	*Equazione determinata con* $\Delta > 0$	$x_1 = 0$ *e* $x_2 = \frac{2}{a^2-1}$

Esempio 3

$$\frac{x-a^2}{x-b^2}x=\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{b^2}{x}$$

Condizione di esistenza: $a \neq 0$. *Per* $a=0$ *l'equazione perde significato*

Condizione di accettabilità: $x \neq 0$ *e* $x \neq b^2$.

$$\frac{x^2-a^2x}{x-b^2}=\frac{b^2x^2}{a^2x}$$

$$\frac{x^2-a^2x}{x-b^2}=\frac{b^2x}{a^2}$$

Riduzione a forma normale:

moltiplicando per: $a^2(x-b^2)\neq 0$ *si ha:* $a^2(x^2-a^2x)=b^2x(x-b^2)$;

$a^2x^2-a^4x=b^2x^2-b^4x$; $a^2x^2-a^4x-b^2x^2+b^4x=0$; $(a^2-b^2)x^2-(a^4-b^4)x=0$;

$\boxed{x\cdot[(a^2-b^2)x-(a^4-b^4)]=0}$ $\quad x=0$ $\quad (a^2-b^2)x-(a^4-b^4)=0$

Discussione:

Per la condizione di accettabilità posta all'inizio, la soluzione $x=0$ *non è accettabile.*

Nella seconda equazione: $(a^2-b^2)x-(a^4-b^4)=0$;

Se $a^2-b^2=0$; *cioè se: Se* $a=\mp b$ $\Rightarrow$ $0\cdot x=0$ *equazione indeterminata.*

Se $a^2-b^2\neq 0$; *cioè se: Se* $a\neq \mp b$ $\Rightarrow$ $x=\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}=\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{a^2-b^2}=a^2+b^2$

Tale soluzione è accettabile se: $a^2+b^2\neq 0$ *e* $a^2+b^2\neq b^2$

$a^2+b^2\neq 0$ *sempre; perchè, per la condizione di esistenza,* $a\neq 0$ *e quindi anche* $a^2+b^2\neq 0$.

$a^2+b^2\neq b^2$; $\quad a^2\neq 0$; $\quad a\neq 0$

Riepilogando:

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a=0$	*Equazione che perde significato*	
$a\neq 0 \quad \wedge \quad a=\mp b$	*Equazione indeterminata*	
$a\neq 0 \quad \wedge \quad a\neq \mp b$	*Equazione determinata*	$x=a^2+b^2$

Esempio 4

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$

Condizione di esistenza: $k \neq 0$ *e* $k \neq -1$ *. Per* $k = 0$ *e* $k = -1$ *l'equazione perde significato.*

Condizione di accettabilità: $x \neq 0$ *e* $x \neq -1$ *.*

Riduzione a forma normale:
moltiplicando per: $kx(x+1)(k+1) \neq 0$ *si ha:*

$kx(k+1) + k(k+1)(x+1) = x(k+1)(x+1) + kx(x+1)\,;$

$k^2x + \cancel{kx} + k^2x + \cancel{kx} + k^2 + k = kx^2 + \cancel{kx} + x^2 + x + kx^2 + \cancel{kx}\,;$

$k^2x + k^2x + k^2 + k - kx^2 - x^2 - x - kx^2 = 0\,; \quad 2k^2x + k^2 + k - 2kx^2 - x^2 - x = 0$

$-(2k+1)x^2 + (2k^2-1)x + k^2 + k = 0\,;$

$\boxed{(2k+1)x^2 - (2k^2-1)x - (k^2+k) = 0} \qquad A = 2k+1 \qquad B = -(2k^2-1) \qquad C = -(k^2+k)$

$A = 0$ *(equazione di I° grado) per* $k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \; -\left(\frac{1}{2}-1\right)x - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = 0\,; \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0\,; \quad x = -\frac{1}{2}$

$\Delta = (2k^2-1)^2 + 4(2k+1)(k^2+k) = (2k^2+2k+1)^2$

$\Delta > 0$ *per* $2k^2 + 2k + 1 \neq 0\,;$ *ma essa è sempre diversa da zero poiché non si annulla mai.*

Pertanto sotto le condizioni di esistenza, $k \neq 0$ *e* $k \neq -1$ *, si ottengono le soluzioni:*

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2k^2 - 1 \mp \sqrt{(2k^2+2k+1)^2}}{2\cdot(2k+1)} = \frac{2k^2 - 1 \mp (2k^2+2k+1)}{2\cdot(2k+1)} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{2k^2-1-2k^2-2k-1}{2\cdot(2k+1)} = \dfrac{-2-2k}{2\cdot(2k+1)} = -\dfrac{1+k}{2k+1} \\[2ex] x_2 = \dfrac{2k^2-1+2k^2+2k+1}{2\cdot(2k+1)} = \dfrac{4k^2+2k}{2\cdot(2k+1)} = \dfrac{2k(2k+1)}{2\cdot(2k+1)} = k \end{cases}$$

Tali soluzioni sono accettabili se verificano le condizioni di accettabilità: $x \neq 0$ *e* $x \neq -1$ *. Cioè:*

$-\dfrac{1+k}{2k+1} \neq 0\,;$	$1 + k \neq 0\,;$	$k \neq -1$	$k \neq -1$
$-\dfrac{1+k}{2k+1} \neq -1\,;$	$1 + k \neq 2k + 1\,;$	$k \neq 0$	$k \neq 0$

Ma tali valori sono già stati esclusi in precedenza nella condizione di esistenza, pertanto l'equazione risulta sempre determinata nel dominio delle incognite $(x \neq 0$ *e* $x \neq -1)$ *.*

$\Delta = 0$ *per nessun valore di k*

$\Delta < 0$ *per nessun valore di k*

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di equazione**	**Soluzioni**
$k = 0 \quad \vee \quad k = -1$	*Equazione che perde significato*	
$k = -\frac{1}{2}$	*Equazione di I° grado*	$x = -\frac{1}{2}$
$k \neq 0 \quad \wedge \quad k \neq -1 \quad \wedge \quad k \neq -\frac{1}{2}$	*Equazione completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = -\frac{1+k}{2k+1}$ e $x_2 = k$

Esercizio 414.75

$$\frac{y+a}{y-a}+\frac{2(y-a)}{y+a}=\frac{3a^2+10ay}{y^2-a^2}$$

Condizione di accettabilità: $y \neq -a \quad e \quad y \neq a$.

Moltiplicando per il $m.c.m. = y^2-a^2 \neq 0$ *si ha:*

$(y+a)^2+2(y-a)^2=3a^2+10ay$;

$y^2+a^2+2ay+2(y^2+a^2-2ay)-3a^2-10ay=0$;

$y^2+a^2+2ay+2y^2+2a^2-4ay-3a^2-10ay=0$;

$3y^2-12ay=0$;

$3y(y-4a)=0$; $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} y=0 \\ y=4a \end{array}$

La soluzione $y=0$ *è accettabile se:* $0 \neq -a$ *e* $0 \neq a$ *cioè se* $a \neq 0$

La soluzione $y=4a$ *è accettabile se:* $4a \neq -a$ *e* $4a \neq a$ *cioè se* $a \neq 0$

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a=0$	*Equazione impossibile*	
$a \neq 0$	*Equazione spuria*	$y_1=0 \quad \wedge \quad y_2=4a$

Esercizio 414.76

$$\frac{ax}{x-2}+\frac{3a}{x+1}=\frac{15a}{4}$$

Condizione di accettabilità: $x \neq 2 \quad e \quad x \neq -1$.

Moltiplicando per il $m.c.m. = 4(x-2)(x+1) \neq 0$ *si ottiene:*

$4ax(x+1)+12a(x-2)=15a(x-2)(x+1)$

$4ax^2+4ax+12ax-24a=15a(x^2-x-2)$

$4ax^2+4ax+12ax-24a-15ax^2+15ax+30a=0$

$-11ax^2+31ax+6a=0$

$\boxed{11ax^2-31ax-6a=0}$

Se $a=0 \Rightarrow 0x=0$ *equazione è indeterminata.*

Se $a \neq 0$ *dividendo per a si ottiene:*

$11x^2-31x-6=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{31\mp\sqrt{961+264}}{2\cdot 11}=\frac{31\mp\sqrt{1225}}{22}=\frac{31\mp 35}{22}= \begin{array}{l} x_1=\frac{31-35}{22}=\frac{-4}{22}=-\frac{2}{11} \quad \textit{accettabile} \\ x_2=\frac{31}{22}=\frac{66}{22}=3 \quad \textit{accettabile} \end{array}$$

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a=0$	*Equazione indeterminata*	
$a \neq 0$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_1=-\frac{2}{11} \quad \wedge \quad x_2=3$

Esercizio 414.77

$$\frac{x-a}{ax}-\frac{1}{x-1}=a$$

Condizione di esistenza: $a \neq 0$. *Per* $a=0$ *l'equazione perde significato.*

Condizione di accettabilità: $x \neq 0$ *e* $x \neq 1$.

Moltiplicando per il $m.c.m. = ax(x-1) \neq 0$ *si ottiene:*

$(x-a)(x-1)-ax = a^2x(x-1)$

$x^2-x-ax+a-ax-a^2x^2+a^2x=0$

$\boxed{(1-a^2)x^2+(a^2-2a-1)x+a=0}$

$A=0$ *Equazione di I°:* $1-a^2=0$; $\begin{array}{l} a=-1 \\ a=+1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (1+2-1)x-1=0 \\ (1-2-1)x+1=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x-1=0 \\ -2x+1=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \end{array}$

$\Delta=(a^2-2a-1)^2-4a(1-a^2)=a^4+4a^2+1-4a^3-2a^2+4a-4a+4a^3=$

$=a^4+2a^2+1=(a^2+1)^2$

Il discriminante $\Delta > 0 \quad \forall a \in R$.

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-a^2+2a+1\mp\sqrt{(a^2+1)^2}}{2\cdot(1-a^2)}=\frac{-a^2+2a+1\mp(a^2+1)}{2\cdot(1-a^2)}=$$

$$x_1=\frac{-a^2+2a+1-a^2-1}{2\cdot(1-a^2)}=\frac{-2a^2+2a}{2\cdot(1-a^2)}=\frac{a(1-a)}{(1-a)(1+a)}=\frac{a}{1+a}$$

$$x_2=\frac{-a^2+2a+1+a^2+1}{2\cdot(1-a^2)}=\frac{2+2a}{2\cdot(1-a^2)}=\frac{1+a}{(1-a)(1+a)}=\frac{1}{1-a}$$

La soluzione $x=\frac{a}{1+a}$ *è accettabile se:* $\frac{a}{1+a}\neq 0$ *cioè se* $a\neq 0$.

La soluzione $x=\frac{a}{1+a}$ *è accettabile se:* $\frac{a}{1+a}\neq 1$; $a\neq 1+a$; *vera* $\forall a \in R$.

La soluzione $x=\frac{1}{1-a}$ *è accettabile se:* $\frac{1}{1-a}\neq 0$; $1\neq 0$; *vera* $\forall a \in R$.

La soluzione $x=\frac{1}{1-a}$ *è accettabile se:* $\frac{1}{1-a}\neq 1$; $1\neq 1-a$; *cioè se* $a\neq 0$.

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=0$	*Equazione che perde significato*	
$a=\pm 1$	*Equazione di I° grado*	$x=\frac{1}{2}$
$a\neq 0 \quad \wedge \quad a\neq \mp 1$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_1=\frac{a}{1+a} \quad \wedge \quad x_2=\frac{1}{1-a}$