Equazioni letterali di II° grado

Un'equazione letterale di II° grado è un'equazione che contiene, oltre la lettera che rappresenta l'incognita dell'equazione, altre lettere, dette parametri, che rappresentano numeri ben determinati, cioè aventi valore costante ma non indicato.

La risoluzione di un'equazione letterale di II° grado, detta discussione, consiste nel determinare come variano le sue soluzioni al variare dei valori assunti dai parametri che in essa compaiono.

In particolare occorre determinare:

- per quali valori dei parametri l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte, due soluzioni reali e coincidenti o nessuna soluzione reale.
- per quali valori dei parametri l'equazione si riduce al I° grado e quando essa risulta determinata indeterminata o impossibile.

Per risolvere un'equazione parametrica di II° grado occorre:

1. Trasformare l'equazione nella sua forma canonica $Ax^2 + Bx + C = 0$

   Raccogliere a fattor comune i termini in x^2 e i termini in x, per determinare i coefficienti A, B, C dell'equazione, in funzione del parametro

2. Studiare il caso $A = 0$ (l'equazione diventa di I° grado)

   *Determinare i valori di **k** per i quali $A = 0$*

   Sostituire tali valori nell'equazione e determinare le soluzioni

3. Studiare il caso $B = 0$ (l'equazione diventa pura)

   Determinare i valori di k per i quali $B = 0$

   Sostituire tali valori nell'equazione e determinare le soluzioni

4. Studiare il caso $C = 0$ (l'equazione diventa spuria)

   Determinare i valori di k per i quali $C = 0$

   Sostituire tali valori nell'equazione e determinare le soluzioni

5. Calcolare il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

6. Studiare il caso $\Delta > 0$ (l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte)

   *Risolvere la disequazione $\Delta > 0$ per determinare i valori di **k** per i quali $\Delta > 0$*

   Determinare le due soluzioni reali e distinte: x_1 e x_2

7. Studiare il caso $\Delta = 0$ (l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti)

   *Risolvere l'equazione $\Delta = 0$ per determinare i valore di **k** per i quali $\Delta = 0$*

   Determinare le soluzioni due soluzioni reali e coincidenti: $x_{1,2}$

8. Studiare il caso $\Delta < 0$ (l'equazione ammette due soluzioni complesse e distinte)

   *Risolvere la disequazione $\Delta < 0$ per determinare i valori di **k** per i quali $\Delta < 0$*

9. Rappresentare il quadro riassuntivo della discussione dell'equazione

   Rappresentare il quadro riassuntivo con il seguente schema

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$k = -1$	*Equazione di I° grado*	$x = 4$
$k = 2$	*Equazione Pura*	$x_{1,2} = \pm 3$
$k = 3$	*Equazione Spuria*	$x_1 = 0 \quad e \quad x_2 = 5$
...	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	...
...	*Equazione Completa con* $\Delta = 0$	...
...	*Equazione Completa con* $\Delta < 0$	...
...	*Equazione indeterminata*	...
...	*Equazione impossibile*	...
...	*Equazione che perde significato*	...

Esempio 1

$kx^2 - 2kx + x^2 - 3x + k - 3 = 0$

1. $\boxed{(k+1)x^2 - (2k+3)x + k - 3 = 0}$ $\quad A = (k+1) \quad B = -(2k+3) \quad C = k - 3$

2. $A = 0$ *(Equazione di I°)* $\quad k+1=0$ *cioè:* $k=-1; \quad -[2\cdot(-1)+3]x - 1 - 3 = 0; \quad -x-4=0; \quad x=-4$

3. $B = 0$ *(Equazione Pura)* $\quad 2k+3=0$ cioè: $k=-\frac{3}{2} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}+1\right)x^2 - \frac{3}{2} - 3 = 0; \;\; ; \;\; -\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2} = 0;$

   $-x^2 - 9 = 0; \quad x^2 + 9 = 0$; *equazione impossibile*

4. $C = 0$ *(Equazione Spuria)* $\quad k-3=0$ *cioè:* $k=3 \Rightarrow 4x^2 - 9x = 0; \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{9}{4} \end{matrix}$

5. $\Delta = (2k+3)^2 - 4\cdot(k+1)\cdot(k-3) = 4k^2 + 9 + 12k - 4\cdot\left(k^2 - 3k + k - 3\right) =$

   $= 4k^2 + 9 + 12k - 4\cdot\left(k^2 - 2k - 3\right) = 4k^2 + 9 + 12k - 4k^2 + 8k + 12 = 20k + 21$

6. $\Delta > 0; \quad 20k + 21 > 0 \;;\; k > -\frac{21}{20} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2k+3 \pm \sqrt{20k+21}}{2\cdot(k+1)}$

7. $\Delta = 0; \quad 20k+21=0 \;;\; k = -\frac{21}{20} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{\left[2\cdot\left(-\frac{21}{20}\right)+3\right] \mp \sqrt{0}}{2\cdot\left(-\frac{21}{20}+1\right)} = \frac{-\frac{21}{10}+3}{2\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)} = -\frac{9}{10}\cdot(-10) = 9$

8. $\Delta < 0; \quad 20k+21<0 \;;\; k < -\frac{21}{20} \quad \Rightarrow$ *Soluzioni complesse*

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$k=-1$	*Equazione di I° grado*	$x=-4$
$k=-\frac{3}{2}$	*Equazione pura*	*Nessuna soluzione*
$k=3$	*Equazione spuria*	$x_1 = 0$ *e* $x_2 = \frac{9}{4}$
$k>-\frac{21}{20}$ $k \neq -1 \quad k \neq 3$	*Equazione completa con* $\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{2k+3 \pm \sqrt{20k+21}}{2\cdot(k+1)}$
$k=-\frac{21}{20}$	*Equazione completa con* $\Delta = 0$ *Soluzioni reali e coincidenti*	$x_{1,2} = 9$
$k<-\frac{21}{20}$	*Equazione completa con* $\Delta < 0$	*Soluzioni complesse*

Esempio 2

$kx^2 - 2(k+1)x + 4 = 0$

$A = k \qquad B = -2(k+1) \qquad C = 4$

$A = 0$ *(Equazione di I°)* - $k = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0\,;\quad x = 2$

$B = 0$ *(Equazione Pura)* - $k = -1 \Rightarrow -x^2 + 4 = 0\,;\quad x = \mp 2$

$C = 0$ *mai. L'equazione non è mai spuria.*

$$\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - 4k = k^2 + 1 + 2k - 4k = k^2 + 1 - 2k = (k-1)^2$$

$$\frac{\Delta}{4} > 0 \ \ per \ \ k \neq 1 \ \Rightarrow \ x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{k+1 \mp \sqrt{(k-1)^2}}{k} = \frac{k+1 \mp (k-1)}{k} = \begin{array}{l} x_1 = \frac{k+1-k+1}{k} = \frac{2}{k} \\ x_2 = \frac{k+1+k-1}{k} = 2 \end{array}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \ \ per \ \ k = 1 \ \Rightarrow \ x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{1+1 \mp \sqrt{0}}{1} = 2$$

$\frac{\Delta}{4} < 0$ *per nessun valore di k*

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$k = 0$	*Equazione di I° grado*	$x = 2$
$k = -1$	*Equazione pura*	$x_{1,2} = \pm 2$
Per nessun valore di k	*Equazione spuria*	
$k \neq 1$ *e* $k \neq 0$	*Equazione completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = \frac{2}{k}$ *e* $x_1 = 2$
$k = 1$	*Equazione completa con* $\Delta = 0$ *soluzioni reali e coincidenti*	$x_{1,2} = 2$
Per nessun valore di k	*Equazione completa con* $\Delta < 0$ *Soluzioni complesse*	

Esempio 3

$$\frac{x^2}{2k}+\frac{(4k-1)x}{2k^2+4k}=\frac{2}{k^2+4k+4}$$

$\dfrac{x^2}{2k}+\dfrac{(4k-1)x}{2k(k+2)}=\dfrac{2}{(k+2)^2}$; m.c.m. = $2k\cdot(k+2)^2\neq 0$; $\begin{matrix} k\neq 0 \\ k\neq -2 \end{matrix}$

$(k+2)^2x^2+(k+2)\cdot(4k-1)x=2\cdot 2k$; $(k+2)^2x^2+\left(4k^2+7k-2\right)x-4k=0$;

$A=(k+2)^2$ $B=\left(4k^2+7k-2\right)$ $C=-4k$;

$A=0$; *Equazione di I°;* $(k+2)^2=0$; $k+2=0$; $k=-2$ non accettabile, perché $-2\notin$ Dominio.
Pertanto l'equazione non è mai di I° grado.

$B=0$; *Equazione Pura;* $4k^2+7k-2=0$; $k=-2$ e $k=\dfrac{1}{4}$

$k=-2$ non accettabile, perché $-2\notin$ Dominio.

per $k=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\left(\dfrac{1}{4}+2\right)^2x^2-4\cdot\dfrac{1}{4}=0$; $\left(\dfrac{9}{4}\right)^2x^2-1=0$; $\dfrac{81}{16}x^2-1=0$; $81x^2-16=0$; $x_{1,2}=\pm\dfrac{4}{9}$

$C=0$; *Equazione Spuria;* $-4k=0$; $k=0$; non accettabile, perché $0\notin$ Dominio.
Pertanto l'equazione non è mai spuria.

$$\Delta=b^2-4ac=\left(4k^2+7k-2\right)^2+4\cdot 4k\cdot(k+2)^2=$$
$$=16k^4+49k^2+4+56k^3-16k^2-28k+16k^3+64k+64k^2$$
$$=16k^4+72k^3+97k^2+36k+4=$$
$$=(k+2)^2\cdot\left(16k^2+8k+1\right)=(k+2)^2\cdot(4k+1)^2$$

	16	+72	+97	+36	+4
−2		−32	−80	−34	−4
	16	+40	+17	+2	=

	16	+40	+17	2
−2		−32	−16	−2
	16	+8	+1	=

$\Delta>0$; $(k+2)^2\cdot(4k+1)^2>0$; $k\neq -2$ e $k\neq -\dfrac{1}{4}$

$$x_{1,2}=\frac{-\left(4k^2+7k-2\right)\pm\sqrt{(k+2)^2(4k+1)^2}}{2\cdot(k+2)^2}=\frac{-4k^2-7k+2\pm(k+2)\cdot(4k+1)}{2\cdot(k+2)^2}=$$

$$=\frac{-4k^2-7k+2\pm\left(4k^2+9k+2\right)}{2\cdot(k+2)^2}=\begin{matrix}\dfrac{-8k^2-16k}{2\cdot(k+2)^2} \\[2ex] \dfrac{2k+4}{2\cdot(k+2)^2}\end{matrix}=\begin{matrix}\dfrac{-8k\cdot(k+2)}{2\cdot(k+2)^2} \\[2ex] \dfrac{2\cdot(k+2)}{2\cdot(k+2)^2}\end{matrix}=\begin{matrix}\dfrac{-4k}{(k+2)} \\[2ex] \dfrac{1}{(k+2)}\end{matrix}$$

$\Delta=0$; per $k=-\dfrac{1}{4}$. Per $k=-2$ l'equazione perde di significato, perché $-2\notin$ Dominio

Per $k=-\dfrac{1}{4}$ $x_{1,2}=\dfrac{-4\cdot\dfrac{1}{16}-7\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)+2}{2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}+2\right)^2}=\dfrac{-\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{4}+2}{2\cdot\left(\dfrac{7}{4}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{-1+7+8}{4}}{2\cdot\dfrac{49}{16}}=\dfrac{\dfrac{14}{4}}{\dfrac{49}{8}}=\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{8}{49}=\dfrac{4}{7}$

$\Delta<0$; per nessun valore di k

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$k=0$ e $k=-2$	*Equazione che perde significato*	
Per nessun valore di k	*Equazione di I° grado*	
$k=\frac{1}{4}$	*Equazione Pura*	$x_{1,2}=\pm\frac{4}{9}$
Per nessun valore di k	*Equazione Spuria*	
$k\neq 0 \quad k\neq -2 \quad k\neq -\frac{1}{4}$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_1=\frac{-4k}{(k+2)}$ *e* $x_2=\frac{1}{(k+2)}$
$k=-\frac{1}{4}$	*Equazione Completa con* $\Delta=0$	$x_{1,2}=\frac{4}{7}$
Per nessun valore di k	*Equazione Completa con* $\Delta<0$	

Esempio 4

$2a^2x^2-3ax+1=0$

$A=2a^2$ $\qquad B=-3a$ $\qquad C=1$

$A=0$ *(Equazione di I°)* - $2a^2=0$; $\quad a=0 \quad \Rightarrow \quad 1=0$ *equazione impossibile.*
L'equazione non è mai di I° grado, non è mai pura, non è mai spuria.

Se $2a^2\neq 0$, *cioè se* $a\neq 0$ *si ha:*

$\Delta = \mathbf{9a^2-8a^2=a^2}$

$$\Delta>0 \quad \forall a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3a\mp\sqrt{a^2}}{2\cdot 2a^2}=\frac{3a\mp a}{4a^2}= \begin{cases} x_1=\frac{3a-a}{4a^2}=\frac{2a}{4a^2}=\frac{1}{2a} \\ x_2=\frac{3a+a}{4a^2}=\frac{4a}{4a^2}=\frac{1}{a} \end{cases}$$

$\Delta=0$ *per* $a=0$. *Ma tale valore non è accettabile perché per tale valore l'equazione è impossibile.*

$\Delta<0$ *per nessun valore di a.*

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a=0$	*Equazione impossibile*	
$a\neq 0$	*Equazione completa con* $\Delta>0$	$x_1=\frac{1}{2a}$ *e* $x_2=\frac{1}{a}$

Esempio 5

$ax^2 + 3ax = 3\left(1 + \frac{1}{3}x\right)$

Occorre trasformare l'equazione nella sua forma canonica: $Ax^2 + Bx + C = 0$.

$ax^2 + 3ax - x - 3 = 0$;

$\boxed{ax^2 + (3a-1)x - 3 = 0}$; $A = a$; $B = 3a - 1$; $C = -3$.

$A = 0$ *(Equazione di I°)* - $a = 0 \Rightarrow -x - 3 = 0$; $x = -3$

$B = 0$ *(Equazione Pura)* - $3a - 1 = 0$; $a = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$; $x^2 - 9 = 0$; $x = \mp 3$.

$C = 0$ *(Equazione Spuria)* per nessun valore di a.

$\Delta = (3a-1)^2 + 12a = 9a^2 + 1 - 6a + 12a = 9a^2 + 1 + 6a = (3a+1)^2$

$\Delta > 0$; $(3a+1)^2 > 0$; $3a + 1 \neq 0$; $a \neq -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3a+1 \mp \sqrt{(3a+1)^2}}{2 \cdot a} = \frac{-3a+1 \mp (3a+1)}{2 \cdot a} = \quad x_1 = \frac{-3a+1-3a-1}{2 \cdot a} = \frac{-6a}{2 \cdot a} = -3 \quad x_2 = \frac{-3a+1+3a+1}{2 \cdot a} = \frac{2}{2 \cdot a} = \frac{1}{a}$

$\Delta = 0$; $(3a+1)^2 = 0$; $3a + 1 = 0$; $a = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \mp \sqrt{0}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1+1}{-\frac{2}{3}} = -3$

$\Delta < 0$ *per nessun valore di a.*

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a = 0$	*Equazione di I° grado*	$x = -3$
$a = \frac{1}{3}$	*Equazione Pura*	$x = \mp 3$
Per nessun valore di a	*Equazione Spuria*	
$a \neq 0$ *e* $a \neq -\frac{1}{3}$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = -3$ *e* $x_2 = \frac{1}{a}$
$a = -\frac{1}{3}$	*Equazione Completa con* $\Delta = 0$	$x_{1,2} = -3$
Per nessun valore di a	*Equazione Completa con* $\Delta < 0$	

Esercizio 413.60

$ax(ax-3) = -2$

$\boxed{a^2x^2 - 3ax + 2 = 0}$ $\qquad A = a^2 \qquad B = -3a \qquad C = 2$

$A = 0$ *quando* $a = 0$. *In questo caso però anche* $B = 0$. *Risulta:* $2 = 0 \Rightarrow$ *l'equazione è impossibile.*

L'equazione non è mai di I° grado. L'equazione non è mai pura. L'equazione non è mai spuria.

Per $\boxed{a \neq 0}$ *il discriminante è:* $\Delta = 9a^2 - 8a^2 = a^2$

Essendo il discriminante: $\Delta = a^2 > 0 \quad \forall\, a \neq 0$ *l'equazione ammette sempre due soluzioni reali e distinte*

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3a \mp \sqrt{a^2}}{2a^2} = \frac{3a \mp a}{2a^2} = \begin{matrix} x_1 = \frac{3a-a}{2a^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a} \\ x_2 = \frac{3a+a}{2a^2} = \frac{4a}{2a^2} = \frac{2}{a} \end{matrix}$$

$\Delta = 0$ *per* $a = 0$. *Ma tale valore non è accettabile perché per tale valore l'equazione è impossibile.*

$\Delta < 0$ *per nessun valore di a.*

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a = 0$	*Equazione impossibile*	
$a \neq 0$	*Equazione completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = \frac{1}{a}$ *e* $x_2 = \frac{2}{a}$

Esercizio 413.61

$ax(ax-2) = 2$

$\boxed{a^2x^2 - 2ax - 2 = 0}$; $\qquad A = a^2 \qquad B = -2a \qquad C = -2$

$A = 0$ *quando* $a = 0$. *In questo caso però anche* $B = 0$. *Risulta:* $2 = 0 \Rightarrow$ *l'equazione è impossibile.*

L'equazione non è mai di I° grado. L'equazione non è mai pura. L'equazione non è mai spuria.

Per $\boxed{a \neq 0}$ *si ha:* $\frac{\Delta}{4} = a^2 + 2a^2 = 3a^2$

Essendo il discriminante: $\frac{\Delta}{4} = 3a^2 > 0 \quad \forall\, a \neq 0$ *l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte:*

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{a \mp \sqrt{3a^2}}{a^2} = \frac{a \mp a\sqrt{3}}{a^2} = \begin{matrix} x_1 = \frac{a - a\sqrt{3}}{a^2} = \frac{1-\sqrt{3}}{a} \\ x_2 = \frac{a + a\sqrt{3}}{a^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{a} \end{matrix}$$

$\Delta = 0$ *per* $a = 0$. *Ma tale valore non è accettabile perché per tale valore l'equazione è impossibile.*

$\Delta < 0$ *per nessun valore di a.*

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a = 0$	*Equazione impossibile*	
$a \neq 0$	*Equazione completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{a}$ *e* $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{a}$

Esercizio 413.62

$a(y-2)+2ay^2=ay^2$

$ay-2a+2ay^2-ay^2=0$;

$\boxed{ay^2+ay-2a=0}$ $\qquad A=a \qquad B=a \qquad C=-2a$

$A=0$ *quando* $a=0$. *In questo caso però risulta:* $0=0 \Rightarrow$ *l'equazione è indeterminata.*

L'equazione non è mai di I° grado. L'equazione non è mai pura. L'equazione non è mai spuria.

Per $\boxed{a\neq 0}$ *si ha:* $\Delta=a^2-4a(-2a)=a^2+8a^2=9a^2$

Essendo il discriminante: $\Delta=9a^2>0 \quad \forall\, a\neq 0$ *l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte:*

$$y_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-a\mp\sqrt{9a^2}}{2a}=\frac{-a\mp 3a}{2a}= \begin{cases} y_1=\frac{-a-3a}{2a}=\frac{-4a}{2a}=-2 \\ y_2=\frac{-a+3a}{2a}=\frac{2a}{2a}=1 \end{cases}$$

Oppure

Se $a\neq 0$ *dividiamo tutti i termini per a :*

$y^2+y-2=0$ *le cui soluzioni sono:* $y_1=-2 \quad \wedge \quad y_2=1$.

$\Delta=0$ *per* $a=0$. *Ma tale valore non è accettabile perché per tale valore l'equazione è indeterminata.*

$\Delta<0$ *per nessun valore di a.*

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=0$	*Equazione indeterminata*	
$a\neq 0$	*Equazione completa con* $\Delta>0$	$y_1=-2 \quad \wedge \quad y_2=1$

Esercizio 413.63

$y^2 + y(a+1) - 3a(2a-1) = (3y-a)(y-2a+1)$

$y^2 + ay + y - 6a^2 + 3a = 3y^2 - 6ay + 3y - ay + 2a^2 - a\ ;$

$y^2 + ay + y - 6a^2 + 3a - 3y^2 + 6ay - 3y + ay - 2a^2 + a = 0\ ;$

$-2y^2 + (8a-2)y + 4a - 8a^2 = 0\ ;$

$\boxed{y^2 - (4a-1)y - (2a-4a^2) = 0}$ $\quad A = 1 \quad B = 4a - 1 \quad C = 2a - 4a^2$

$A = 0$ mai. L'equazione non è mai di I° grado.

$B = 0$ *Equazione pura:* $4a - 1 = 0\ ;\ a = \frac{1}{4};\ y^2 - \left[2\frac{1}{4} - 4\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = 0\ ;\ y^2 - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = 0\ ;$

$y^2 = \frac{1}{4};\ y_{1,2} = \mp\frac{1}{2}$

$C = 0\ ;$ *Equazione spuria:* $2a - 4a^2 = 0\ ;$ $\begin{array}{lll} a = 0 & y^2 + y = 0 & y = 0 \text{ e } y = -1 \\ a = \frac{1}{2} & y^2 - y = 0 & y = 0 \text{ e } y = +1 \end{array}$

$\Delta = (4a-1)^2 + 4(2a-4a^2) = 16a^2 + 1 - 8a + 8a - 16a^2 = 1\ ;$

Essendo il discriminante: $\Delta = 1 > 0 \quad \forall\, a \in R$ *l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte:*

$y_{1,2} = \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4a-1\mp\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{4a-1\mp 1}{2} = \begin{array}{l} y_1 = \frac{4a-1-1}{2} = \frac{4a-2}{2} = 2a - 1 \\ y_2 \frac{4a-1+1}{2} = \frac{4a}{2} = 2a \end{array}$

Δ *non è mai uguale a zero o negativo.*

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
Per nessun valore di a	*Equazione di I° grado*	
$a = \frac{1}{4}$	*Equazione pura*	$y_{1,2} = \mp\frac{1}{2}$
$a = 0$ *e* $a = \frac{1}{2}$	*Equazione Spuria*	$x_1 = 0$ *e* $x_2 = -1$ $x_1 = 0$ *e* $x_2 = +1$
$a \neq 0 \quad a \neq \frac{1}{2} \quad a \neq \frac{1}{4}$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = 2a - 1$ *e* $x_2 = 2a$

Esercizio 413.64

$t^2 + t + b(1-b) = 0$

$\boxed{t^2 + t + b(1-b) = 0}$ $\quad A = 1 \quad B = 1 \quad C = b(1-b)$

L'equazione non è mai di I° grado. L'equazione non è mai pura.

$C = 0$; *Equazione spuria:* $b(1-b) = 0$; $\begin{array}{llll} b = 0 & t^2 + t = 0 & t = 0 \text{ e } t = -1 \\ b = 1 & t^2 + t = 0 & t = 0 \text{ e } t = -1 \end{array}$

$\Delta = 1^2 - 4b(1-b) = 1 - 4b + 4b^2 = (1-2b)^2$;

Se il discriminante $\Delta > 0$ *cioè se* $1 - 2b \neq 0$ *cioè se* $b \neq \frac{1}{2}$

l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte:

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \mp \sqrt{(1-2b)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \mp (1-2b)}{2} = \begin{array}{l} t_1 = \frac{-1-(1-2b)}{2} = \frac{-1-1+2b}{2} = \frac{-2+2b}{2} = \boldsymbol{b-1} \\ t_2 = \frac{-1+(1-2b)}{2} = \frac{-1+1-2b}{2} = \frac{-2b}{2} = \boldsymbol{-b} \end{array}$$

Se il discriminante $\Delta = 0$ *cioè se* $1 - 2b = 0$ *cioè se* $b = \frac{1}{2}$

l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti: $t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \mp \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$

$\Delta < 0$ *per nessun valore di b.*

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$b = 0 \quad e \quad b = 1$	*Equazione Spuria*	$t_1 = 0 \quad e \quad t_2 = -1$
$b \neq 0 \quad b \neq 1 \quad b \neq \frac{1}{2}$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = b - 1 \quad e \quad x_2 = -b$
$b = \frac{1}{2}$	*Equazione completa con* $\Delta = 0$ *Soluzioni reali e coincidenti*	$x_{1,2} = -\frac{1}{2}$

Esercizio 413.65

$$t(t-2)+(t+3)(t+1)=3-\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}$$

Per $\boxed{a=0}$ *si ha:* $\frac{2}{0}$ $\Rightarrow$ *l'equazione perde significato.*

Per $\boxed{a\neq 0}$ *si ha:*

$t^2-2t+t^2+t+3t+3-3+\frac{2}{a}-\frac{2}{a^2}=0$;

$2t^2+2t+\frac{2}{a}-\frac{2}{a^2}=0$; *moltiplicando per* $a^2\neq 0$ *si ottiene:*

$2a^2t^2+2a^2t+2a-2=0$; *dividendo per* 2 *si ottiene:*

$\boxed{a^2t^2+a^2t+a-1=0}$ $A=a^2$ $B=a^2$ $C=a-1$

Dato che il parametro a non può essere nullo, l'equazione non è mai di I° grado e non è mai pura.

$C=0$; *Equazione spuria:* $a-1=0$; $a=1$ $\Rightarrow$ $t^2+t=0$; $t=0$ e $t=-1$

$\Delta=a^4-4a^2(a-1)=a^4-4a^3+4a^2=a^2(a-2)^2$;

Essendo: $\Delta=a^2(a-2)^2>0$; *per* $\begin{matrix} a\neq 0 \\ a\neq 2 \end{matrix}$

$\forall a\in R$ *tali che* $\begin{matrix} a\neq 0 \\ a\neq 2 \end{matrix}$ *l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte*

$$t_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-a^2\mp\sqrt{(a^2-2a)^2}}{2\cdot a^2}=\frac{-a^2\mp(a^2-2a)}{2a^2}=$$

$$t_1=\frac{-a^2-a^2+2a}{2a^2}=\frac{-2a^2+2a}{2a^2}=\frac{2a(1-a)^2}{2a^2}=\frac{1-a}{a}$$

$$t_2=\frac{-a^2+a^2-2a}{2a^2}=\frac{-2a}{2a^2}=-\frac{1}{a}$$

$\Delta=0$ *per* $a=2$ $t_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-a^2\mp\sqrt{0}}{2\cdot a^2}=-\frac{1}{2}$

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=0$	*Equazione che perde significato*	
$a=1$	*Equazione Spuria*	$t=0$ e $t_2=-1$
$a\neq 0$ $a\neq 1$ $a\neq 2$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_1=\frac{1-a}{a}$ *e* $x_2=-\frac{1}{a}$
$a=2$	*Equazione completa con* $\Delta=0$ *Soluzioni reali e coincidenti*	$x_{1,2}=-\frac{1}{2}$

Esercizio 414.71

$$\frac{(x-a-b)(2x+3a-b)}{2b}-\frac{(x-a-b)(x+4a)}{2a}=0$$

Per $\boxed{(a=0)\ \vee\ (b=0)}$ *l'equazione perde significato.*

Per $\boxed{(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)}$ *moltiplicando per il* $m.c.m.=2ab\neq 0$ *si ottiene:*

$a(x-a-b)(2x+3a-b)-b(x-a-b)(x+4a)=0$; *raccogliendo a fattor comune si ottiene:*

$(x-a-b)\cdot[a(2x+3a-b)-b(x+4a)]=0$;

$(x-a-b)\cdot(2ax+3a^2-ab-bx-4ab)=0$;

In questo caso non conviene effettuare il prodotto per ovvi motivi di calcolo.

$\boxed{(x-a-b)\cdot[(2a-b)x+3a^2-5ab]=0}$; *per la legge dell'annullamento del prodotto si ha:*

$(x-a-b)=0 \quad \vee \quad (2a-b)x+3a^2-5ab=0$; *da cui si ottiene:*

$x=a+b \quad \vee \quad (2a-b)x=-3a^2+5ab$;

Se $2a-b\neq 0$; *cioè se:* $\boxed{b\neq 2a}$ *si hanno le due soluzioni:*

$x=a+b \quad \vee \quad x=\frac{a(5b-3a)}{2a-b}$

Se $2a-b=0$; *cioè se:* $\boxed{b=2a}$

La seconda equazione è impossibile. Mentre la prima diventa: $x=a+b=a+2a=3a$

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a=0 \quad \vee \quad b=0$	*Equazione che perde significato*	
$a\neq 0 \quad b\neq 0 \quad b=2a$	*Equazione di I° grado*	$x=3a$
$a\neq 0 \quad b\neq 0 \quad b\neq 2a$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_1=a+b$ *e* $x_2=\frac{a(5b-3a)}{2a-b}$

Se invece si effettua il prodotto: $(x-a-b)\cdot[(2a-b)x+3a^2-5ab]=0$

si ottiene: $(2a-b)x^2+(a^2+b^2-6ab)x-a(a+b)(3a-5b)=0$

dalla quale si possono ricavare anche i valori dei parametri a e b per i quali l'equazione è pura e spuria.

Esercizio 414.73

$$\frac{3x^2}{a+b}+\frac{4x}{ab}=-\frac{4a+b}{a^2b(a+b)}$$

Per $\boxed{(a=0)\land(b=0)\land(a=-b)}$ *l'equazione perde significato.*

Per $\boxed{(a\neq 0)\land(b\neq 0)\land(a\neq -b)}$ *moltiplicando per il* $m.c.m.=2a^2b(a+b)\neq 0$ *si ha:*

$6a^2bx^2+8a(a+b)x=-2(4a+b)$;

$\boxed{3a^2bx^2+4a(a+b)x+(4a+b)=0}$ $\quad A=3a^2 \quad B=4a(a+b) \quad C=4a+b$

$A=0$ *quando* $a=0$. *Ma per tale valore l'equazione perde significato. Pertanto non è mai di I° grado.*

$B=0$ *quando* $a=0$ *o* $a=-b$. *Ma per tali valori l'equazione perde significato. Pertanto non è mai pura.*

$C=0$ *quando* $a=-\frac{b}{4}$. *Per tale valore l'equazione diventa:*

$3\left(-\frac{b}{4}\right)^2bx^2+4\left(-\frac{b}{4}\right)\left(-\frac{b}{4}+b\right)x=0$; $\quad \frac{3b^3}{16}x^2-b\frac{3}{4}bx=0$;

$x\left(\frac{3b^3}{16}x-\frac{3}{4}b^2\right)=0$; $\quad \begin{matrix} x=0 \\ x=\frac{3}{4}b^2\cdot\frac{16}{3b^3}=\frac{4}{b}\end{matrix}$

$$\frac{\Delta}{4}=4a^2(a+b)^2-3a^2b\cdot(4a+b)=4a^2(a^2+b^2+2ab)-12a^3b-3a^2b^2=$$

$$=4a^4+4a^2b^2+8a^3b-12a^3b-3a^2b^2=4a^4+a^2b^2-4a^3b=a^2(4a^2+b^2-4ab)=a^2(2a-b)^2$$

$\frac{\Delta}{4}=a^2(2a-b)^2>0$ *per* $a\neq\frac{b}{2}$ $\Rightarrow$ *l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte.*

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{-2a(a+b)\mp\sqrt{a^2(2a-b)^2}}{3a^2b}=\frac{-2a^2-2ab\mp a(2a-b)}{3a^2b}=$$

$$=\frac{-2a^2-2ab\mp(2a^2-ab)}{3a^2b}=\begin{matrix} x_1=\frac{-2a^2-2ab-2a^2+ab}{3a^2b}=\frac{-4a^2-ab}{3a^2b}=-\frac{4a+b}{3ab} \\ x_2=\frac{-2a^2-2ab+2a^2-ab}{3a^2b}=\frac{-3ab}{3a^2b}=-\frac{1}{a}\end{matrix}$$

Mentre se: $a=\frac{b}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\Delta}{4}=a^2(2a-b)^2=0$ $\Rightarrow$ *l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti.*

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{-2a(a+b)\mp\sqrt{0}}{3a^2b}=\frac{-2a(a+2a)}{3a^2\cdot 2a}=\frac{-2a\cdot 3a}{6a^3}=-\frac{1}{a}$$

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=0 \quad b=0 \quad a=-b$	*Equazione che perde significato*	
$a=-\frac{b}{4}$	*Equazione spuria*	$x_1=0$ *e* $x_2=\frac{4}{b}$
$a\neq 0 \quad b\neq 0$ $a\neq -b \quad a\neq\frac{b}{2}$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_1=-\frac{4a+b}{3ab}$ *e* $x_2=-\frac{1}{a}$
$a=\frac{b}{2}$	*Equazione completa con* $\Delta=0$ *Soluzioni reali e coincidenti*	$x_{1,2}=-\frac{1}{a}$

Esercizio 414.74a

$ax^2 - 1 = 0$

Per $\boxed{a = 0}$ *si ha:* $-1 = 0 \quad \Rightarrow$ *l'equazione è impossibile.*

Per $\boxed{a \neq 0}$ *si ha:* $ax^2 = 1$ *; cioè:*

$x^2 = \frac{1}{a}$ *; la quale ammette due soluzioni reali ed opposte* $x_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{1}{a}}$ *se* $a > 0$.

Concludendo:

per $a \leq 0$ *l'equazione è impossibile.*

per $a > 0$ *l'equazione ammette due soluzioni reali ed opposte* $x_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{1}{a}}$

Esercizio 414.74b

$a^2x^2 - 1 = 0$

Per $\boxed{a = 0}$ *si ha:* $-1 = 0 \quad \Rightarrow$ *l'equazione è impossibile.*

Per $\boxed{a \neq 0}$ *si ha:* $a^2x^2 = 1$ *;* $x^2 = \frac{1}{a^2}$ *; l'equazione ha due soluzioni reali ed opposte* $x_{1,2} = \mp\frac{1}{a}$.

Esercizio 414.74c

$x^2 = a^2$

Per $\boxed{a = 0}$ *l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti* $x_{1,2} = 0$

Per $\boxed{a \neq 0}$ *l'equazione ammette due soluzioni reali ed opposte* $x_{1,2} = \mp a$

Esercizio 414.74d

$a^2x^2 - b^2 = 0$

Per $\boxed{(a = 0) \land (b = 0)}$ *si ha:* $0 = 0 \quad \Rightarrow$ *l'equazione è indeterminata.*

Per $\boxed{(a = 0) \land (b \neq 0)}$ *si ha:* $-b^2 = 0 \quad \Rightarrow$ *l'equazione è impossibile.*

Per $\boxed{(a \neq 0) \land (b = 0)}$ *si ha:* $a^2x^2 = 0 \quad \Rightarrow$ *l'equazione ha due sol. reali e coincidenti* $x_{1,2} = 0$

Per $\boxed{(a \neq 0) \land (b \neq 0)}$ *l'equazione ha due soluzioni reali e distinte:* $x_{1,2} = \mp\frac{b}{a}$

Esercizio 414.74e

$x^2 + a^2 = 0$

Per $\boxed{a = 0}$ *si ha:* $x^2 = 0$ $\Rightarrow$ *l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti* $x_{1,2} = 0$

Per $\boxed{a \neq 0}$ *si ha:* $x^2 = -a^2$ $\Rightarrow$ *l'equazione è impossibile.*

Esercizio 414.74f

$(a-1)x^2 - b^2 = 0$

Per $\boxed{(a = 1) \wedge (b = 0)}$ *si ha:* $0 = 0$ $\Rightarrow$ *l'equazione è indeterminata.*

Per $\boxed{(a = 1) \wedge (b \neq 0)}$ *si ha:* $-b^2 = 0$ $\Rightarrow$ *l'equazione è impossibile.*

Per $\boxed{(a \neq 1) \wedge (b = 0)}$ *si ha:* $(a-1)x^2 = 0$ $\Rightarrow$ *l'equazione ha due sol. reali e coincidenti* $x_{1,2} = 0$

Per $\boxed{(a > 1) \wedge (b \neq 0)}$ *l'equazione ha due soluzioni reali e distinte:* $x_{1,2} = \mp \frac{b}{\sqrt{a-1}}$

Per $\boxed{(a < 1) \wedge (b \neq 0)}$ *l'equazione è impossibile*

Per $\boxed{(a < 1) \wedge (b = 0)}$ *si ha:* $(a-1)x^2 = 0$ $\Rightarrow$ *l'equazione ha due sol. reali e coincidenti* $x_{1,2} = 0$

Esercizio 414.74g

$ax^2 - 3x = 0$

Per $\boxed{a = 0}$ *si ha:* $-3x = 0$ $\Rightarrow$ *l'equazione ha una soluzione reale* $x = 0$

Per $\boxed{a \neq 0}$ *si ha:* $x \cdot (ax - 3) = 0$ $\Rightarrow$ *l'equazione ha due soluzioni reali e distinte:*

$x = 0$ $\quad x = 0$

$ax - 3 = 0$ $\quad x = \frac{3}{a}$

Esercizio 414.74h

$2x^2 - ax = 0$

Per $\boxed{a = 0}$ *si ha:* $2x^2 = 0$ $\Rightarrow$ *l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti* $x_{1,2} = 0$

Per $\boxed{a \neq 0}$ *si ha:* $x \cdot (2x - a) = 0$ $\Rightarrow$ *l'equazione ha due soluzioni reali e distinte:*

$x = 0$ $\quad x = 0$

$2x - a = 0$ $\quad x = \frac{a}{2}$

Esercizio 414.74i

$2x^2 - 3ax + bx = 0$

$2x^2 - (3a - b)x = 0$

Per $\boxed{3a - b = 0}$ *cioè per* $b = 3a$ *si ha:* $2x^2 = 0$ *l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti* $x_{1,2} = 0$

Per $\boxed{3a - b \neq 0}$ *cioè per* $b \neq 3a$ *l'equazione ha due soluzioni reali e distinte:*

$x \cdot [2x - (3a - b)] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$, $2x - (3a - b) = 0$ $\quad x = 0$, $x = \frac{3a - b}{2}$

Esercizio 414.74l

$(a + b)x^2 = -2x$

$(a + b)x^2 + 2x = 0$

Per $a + b = 0$ *cioè per* $\boxed{a = -b}$ *si ha:* $2x = 0$ *l'equazione ha una soluzione reale* $x = 0$

Per $a + b \neq 0$ *cioè per* $\boxed{a \neq -b}$ *l'equazione ha due soluzioni reali e distinte:*

$x \cdot [(a + b)x + 2] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$, $(a + b)x + 2 = 0$ $\quad x = 0$, $x = -\frac{2}{a + b}$