EQUAZIONI DI II GRADO PARAMETRICHE CONDIZIONATE

Teoria

Per risolvere un'equazione parametrica di II° grado, vincolata da condizioni, occorre:

1. Trasformare l'equazione nella sua forma canonica $ax^2 + bx + c = 0$
2. Applicare le condizioni sotto indicate:

N	Tipologia delle radici	Condizione da imporre
1	Una sola soluzione (Equazione di I° grado)	$a = 0$
2	Radici opposte (Equazione pura)	$b = 0$
3	Una radice uguale a zero (Equazione spuria)	$c = 0$
4	Radici reali e distinte	$\Delta > 0$
5	Radici reali	$\Delta \geq 0$
6	Radici reali e coincidenti	$\Delta = 0$
7	Radici complesse	$\Delta < 0$
8	Una radice uguale a 5	$x_1 = 5$ Sostituire $x = 5$ nell'equazione
9	Somma delle radici	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
10	Prodotto delle radici	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
11	Radici reciproche	$x_1 = \frac{1}{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{a} = 1$
12	Radici antireciproche	$x_1 = -\frac{1}{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{a} = -1$
13	Differenza delle radici	$x_1 - x_2 = \frac{\mp\sqrt{\Delta}}{a}$
14	Somma dei quadrati delle radici	$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$
15	Somma dei cubi delle radici	$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}$
16	Somma dei reciproci delle radici	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} \quad con\ \ c \neq 0$
17	Somma dei quadrati dei reciproci delle radici	$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2} \quad con\ \ c \neq 0$
18	Somma dei cubi dei reciproci delle radici	$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{3abc - b^3}{c^3} \quad con\ \ c \neq 0$

Dimostrazione 9

$$x_1 + x_2 \;=\; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \;=\; \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \;=\; \frac{-2b}{2a} \;=\; -\frac{b}{a}.$$

Dimostrazione 10

$$x_1 \cdot x_2 \;=\; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \;=\; \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\,a^2} \;=\; \frac{b^2-\Delta}{4\,a^2} \;=\; \frac{b^2-(b^2-4\,a\,c)}{4\,a^2} \;=\; \frac{4ac}{4\,a^2} \;=\; \frac{c}{a}.$$

Dimostrazione 11

$$x_1 = \frac{1}{x_2}\,; \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = 1\,; \qquad\qquad \frac{c}{a} = 1\,.$$

Dimostrazione 12

$$x_1 = -\frac{1}{x_2}\,; \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = -1\,; \qquad\qquad \frac{c}{a} = -1\,.$$

Dimostrazione 13

$$x_1 - x_2 \;=\; \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \;=\; \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}+b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \;=\; \frac{\pm2\sqrt{\Delta}}{2a} \;=\; \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{a}.$$

Dimostrazione 14

$$x_1^2 + x_2^2 \;=\; (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 \;=\; \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{a} \;=\; \frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a} \;=\; \frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

Dimostrazione 15

$$x_1^3 + x_2^3 \;=\; (x_1+x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 \;=\; (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) \;=$$

$$=\; \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right) \;=\; -\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2} \;=\; \frac{3abc-b^3}{a^3}.$$

Dimostrazione 16

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} \;=\; \frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2} \;=\; \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \;=\; -\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} \;=\; -\frac{b}{c}.$$

EQUAZIONI DI II GRADO PARAMETRICHE CONDIZIONATE

Esempi

Esempio 1

Determina per quali valori di k le soluzioni dell'equazione $(k-2)x^2-2x+3=0$, con $k \neq 2$:

a. **sono reali ed una uguale a 5;**
b. **sono reali e la loro somma è 1;**
c. **sono reali e antireciproche.**

Soluzione

Determiniamo le condizioni di realtà delle soluzioni:

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0\,; \quad \left(\frac{B}{2}\right)^2 - A \cdot C \geq 0\,; \quad \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (k-2) \cdot 3 \geq 0\,; \quad 1-3k+6 \geq 0\,; \quad 3k \leq 7\,; \quad k \leq \frac{7}{3}.$$

a. *Imponiamo che* $x=5$ *sia soluzione dell'equazione:*

$(k-2) \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 = 0\,;$

$(k-2) \cdot 25 - 10 + 3 = 0\,;$

$25k - 50 - 10 + 3 = 0\,; \qquad 25k = 57\,; \qquad \boldsymbol{k = \frac{57}{25}}\,;$

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

b. $\boldsymbol{x_1 + x_2 = 1}$

Dalla relazione: $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$ *si ha:* $-\frac{B}{A} = 1\,;$

$-\frac{-2}{k-2} = 1\,; \qquad \frac{2}{k-2} = 1\,; \qquad 2 = k-2\,; \qquad k = 4$ *Non accettabile.*

Tale valore non è accettabile per le condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate: $k \leq \frac{7}{3}$.
Non esiste pertanto alcun valore di k per cui le soluzioni sono reali e hanno somma 1.

c. $\boldsymbol{x_1 = -\frac{1}{x_2}}$

La relazione: $x_1 = -\frac{1}{x_2}$ *equivale a* $x_1 \cdot x_2 = -1\,;$ *cioè:* $\frac{C}{A} = -1$

Sostituendo si ha: $\frac{3}{k-2} = -1\,; \qquad 3 = -k+2\,; \qquad \boldsymbol{k = -1}$ *Accettabile.*

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

Verifica quesito a

$\left(\frac{57}{25} - 2\right)x^2 - 2x + 3 = 0\,; \qquad \frac{7}{25}x^2 - 2x + 3 = 0\,; \qquad 7x^2 - 50x + 75 = 0\,;$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c = \left(\frac{-50}{2}\right)^2 - 7 \cdot 75 = 625 - 525 = 100\,;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{25 \mp \sqrt{100}}{7} = \begin{cases} x_1 = \frac{25-10}{7} = \frac{15}{7} \\ x_2 = \frac{25+10}{7} = \frac{35}{7} = 5. \end{cases}$$

Esempio 2

Determina per quali valori di k le soluzioni dell'equazione $x^2 - kx - 2 = 0$:

a. **sono reali ed opposte;**
b. **sono reali e la somma dei loro quadrati è 13;**
c. **sono reali e la somma dei loro reciproci è uguale a -2 .**

Soluzione

Determiniamo le condizioni di realtà delle soluzioni:

$\Delta \geq 0$; $(B)^2 - 4 \cdot A \cdot C \geq 0$; $(-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \geq 0$; $k^2 + 8 \geq 0$; $\forall\, k \in R$.

a. *le soluzioni sono opposte quando* $b = 0$, *cioè:* $-k = 0$; $\boldsymbol{k = 0}$.

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

b. $\boldsymbol{x_1^2 + x_2^2 = 13}$;

Ricordiamo che: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{B}{A}\right)^2 - 2 \cdot \frac{C}{A}$.

Si ottiene: $\left(-\frac{B}{A}\right)^2 - 2 \cdot \frac{C}{A} = 13$; $\left(-\frac{-k}{1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-2}{1} = 13$; $k^2 + 4 = 13$; $k^2 = 9$; $\boldsymbol{k = \mp 3}$.

Valori accettabili perché rientrano nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

c. $\boldsymbol{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2}$;

La relazione: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{B}{A}}{\frac{C}{A}} = -\frac{B}{C}$.

Si ottiene: $-\frac{B}{C} = -2$; $-\frac{-k}{-2} = -2$; $-\frac{k}{2} = -2$; $\boldsymbol{k = 4}$.

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

Esempio 3

Determina per quali valori di k le soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x - k + 4 = 0$:

a. **sono reali ed una uguale a zero;**
b. **sono reali e la somma dei loro cubi è 40;**
c. **sono reali e tali che $x_1 + x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -8$.**

<u>*Soluzione*</u>

a. *Determiniamo le condizioni di realtà delle soluzioni:*

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \; ; \qquad \left(\frac{B}{2}\right)^2 - A \cdot C \geq 0 \; ; \qquad \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 1 \cdot (-k+4) \geq 0 \; ; \qquad 4 + k - 4 \geq 0 \; ; \qquad k \geq 0 \, .$$

Una soluzione è uguale a zero quando $c = 0$, *cioè:* $-k + 4 = 0$; $\boldsymbol{k = 4}$.

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

b. $\boldsymbol{x_1^3 + x_2^3 = 40}$;

La relazione: $x_1^3 + x_2^3 \; = \; (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 \; = \; (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \; =$

$$= \left(-\frac{B}{A}\right)^3 - 3 \cdot \frac{C}{A} \cdot \left(-\frac{B}{A}\right) \; = \; -\frac{B^3}{A^3} + 3\frac{BC}{A^2} \; = \; \frac{-B^3 + 3ABC}{A^3} \, .$$

Si ottiene:

$$\frac{-B^3 + 3ABC}{A^3} = 40 \; ; \qquad \frac{-(-4)^3 + 3 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot (-k+4)}{A^3} = 40 \; ;$$

$$\frac{64 - 12 \cdot (-k+4)}{1^3} = 40 \; ; \qquad 64 + 12k - 48 = 40 \; ; \qquad 12k = 24 \; ; \qquad \boldsymbol{k = 2}$$

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

c. $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -8}$;

La relazione: $x_1 + x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 \; = \; x_1 + x_2 + x_1 x_2 \cdot (x_1 + x_2) \; =$

$$= \left(-\frac{B}{A}\right) + \frac{C}{A} \cdot \left(-\frac{B}{A}\right) \; = \; -\frac{B}{A} - \frac{BC}{A^2} \; = \; \frac{-AB - BC}{A^2} \, .$$

Si ottiene:

$$\frac{-AB - BC}{A^2} = -8 \; ; \qquad \frac{-1 \cdot (-4) - (-4) \cdot (-\mathrm{k} + 4)}{1^2} = -8 \; ;$$

$$4 + 4 \cdot (-k+4) = -8 \; ; \qquad 4 - 4k + 16 = -8 \; ; \qquad -4k = -28 \; ; \qquad \boldsymbol{k = 7} \, .$$

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

Esempio 4

Determina per quali valori di k le soluzioni dell'equazione $kx^2+(k+1)x-k=0$ sono reali e $x_1+2x_2=-1$.

<u>Soluzione</u>

Determiniamo le condizioni di realtà delle soluzioni:

$\Delta \geq 0$; $\quad B^2-4\cdot A\cdot C\geq 0$; $\quad (k+1)^2-4\cdot k\cdot(-k)\geq 0$; $\quad k^2+1+2k+4k^2\geq 0$;

$5k^2+2k+1\geq 0$; $\quad \forall k\in R$.

Associamo alla condizione $x_1+2x_2=-1$ *le due relazioni che esprimono la somma e il prodotto delle soluzioni. Consideriamo cioè il sistema:*

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-1 \\ x_1+x_2=-\dfrac{B}{A} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{C}{A} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+2x_2=-1 \\ x_1+x_2=-\dfrac{k+1}{k} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{-k}{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+2x_2=-1 \\ x_1+x_2=-\dfrac{k+1}{k} \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}$$

Consideriamo il sistema formato dalla prima e dalla terza equazione:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-1 \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-1-2x_2 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ (-1-2x_2)\cdot x_2=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ -x_2-2x_2^2=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ 2x_2^2+x_2-1=0 \end{cases} \qquad \Delta=B^2-4\cdot A\cdot C=1^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9\,.$$

$$x_2=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\mp\sqrt{9}}{2\cdot 2}= \begin{array}{l} (x_2)_1=\dfrac{-1-3}{4}=-\dfrac{4}{4}=-1 \\ (x_2)_2=\dfrac{-1+3}{4}=+\dfrac{2}{4}=+\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Otteniamo le due soluzioni:

$\begin{cases} x_1=-1-2\cdot(-1)=+1 \\ x_2=-1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1=+1 \\ x_2=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1=-1-2\cdot\dfrac{1}{2}=-2 \\ x_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=+\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Sostituendo tali valori nella seconda equazione si ottiene:

$x_1+x_2=-\dfrac{k+1}{k}$; $1+(-1)=-\dfrac{k+1}{k}$ $\dfrac{k+1}{k}=0$; $k+1=0$; $\boldsymbol{k=-1}$.	$-2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{k+1}{k}$; $-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{k+1}{k}$; $3k=2(k+1)$; $3k=2k+2$; $\boldsymbol{k=2}$.

Valori accettabili perché rientrano nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.