DISEQUAZIONI IRRAZIONALI
con radicali con indice dispari

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) < [B(x)]^n$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) > [B(x)]^n$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad A(x) < B(x)$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad A(x) > B(x)$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI
con radicali con indice pari

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$$

Quando invece figurano due o più radicali occorre:

1. *determinare dapprima le condizioni di esistenza dei radicali di indice pari (radicandi ≥ 0)*
2. *studiare il segno di ciascun membro prima di ogni innalzamento a potenza.*

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI
con radicali con indice dispari

$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$	$\Leftrightarrow$	$A(x) < [B(x)]^n$
$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$	$\Leftrightarrow$	$A(x) > [B(x)]^n$

$\sqrt[n]{A(x)} < \sqrt[n]{B(x)}$	$\Leftrightarrow$	$A(x) < B(x)$
$\sqrt[n]{A(x)} > \sqrt[n]{B(x)}$	$\Leftrightarrow$	$A(x) > B(x)$

Esempio 1

$\sqrt[3]{\boldsymbol{x^3 - x}} < \boldsymbol{x - 1}$; $\quad x^3 - x < (x-1)^3$; $\quad x^3 - x < x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $\quad 3x^2 - 4x + 1 < 0$;

$3x^2 - 4x + 1 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1$; $\quad x_{1,2} = \frac{2 \mp 1}{3} = \begin{matrix} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 \end{matrix}$

La disequazione è verificata per $\frac{1}{3} < \boldsymbol{x} < 1$

Esempio 2

$\sqrt[5]{\boldsymbol{3x - 8}} < \sqrt[5]{\boldsymbol{2x - 3}}$; $\quad \left(\sqrt[5]{3x-8}\right)^5 < \left(\sqrt[5]{2x-3}\right)^5$; $\quad 3x - 8 < 2x - 3$; $\quad x < 5$.

La disequazione è verificata per $\boldsymbol{x} < 5$.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI
con radicali con indice pari

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < \sqrt[n]{B(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

Quando invece figurano due o più radicali occorre:

3. *determinare dapprima le condizioni di esistenza dei radicali di indice pari (radicandi ≥ 0)*
4. *studiare il segno di ciascun membro prima di ogni innalzamento a potenza.*

Esempio 1

$$\sqrt[2]{x+1} < 5 - x \qquad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 5-x > 0 \\ x+1 < (5-x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 5 \\ x+1 < 25 + x^2 - 10x \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leq x < 5 \\ x^2 - 11x + 24 > 0 \end{cases}$$

Risolviamo $x^2 - 11x + 24 > 0$; $\Delta = 121 - 96 = 25$; $x_{1,2} = \frac{11 \mp 5}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 8 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x < 3 \ \vee \ x > 8$

Pertanto si ha: $\begin{cases} -1 \leq x < 5 \\ x < 3 \ \vee \ x > 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{-1 \leq x < 3}$.

In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione data è: $\boldsymbol{S = \{ \ x \ / \ \ -1 \leq x < 3 \ \}}$.

Esempio 2

$$\sqrt[2]{x+1} > 5 - x \ ; \qquad \begin{cases} 5-x < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+1 > (5-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ x+1 > 25 + x^2 - 10x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 < 0 \end{cases}$$

Risolviamo $x^2 - 11x + 24 < 0$; $\Delta = 121 - 96 = 25$; $x_{1,2} = \frac{11 \mp 5}{2} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 8 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 3 < x < 8$

Pertanto la soluzione è data da: $\begin{cases} x > 5 \\ x \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ 3 < x < 8 \end{cases}$

Ossia $\quad 3 < x \leq 5 \quad \vee \quad x > 5$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione data è: $\boldsymbol{S = \{ \ x \ / \ \ x > 3 \ \}}$.

$\sqrt[2]{\mathbf{2x-1}} - \sqrt[2]{\boldsymbol{x}} \leq \sqrt[2]{\mathbf{2-x}}$ *Le condizioni di esistenza sono:* $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$ $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ (1)

Per evitare che negli elevamenti al quadrato si introducano soluzioni estranee, riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la positività di entrambi i membri.

$\sqrt[2]{2x-1} \leq \sqrt[2]{2-x} + \sqrt[2]{x}$; *elevando ambo i membri al quadrato si ha:*

$\left(\sqrt[2]{2x-1}\right)^2 \leq \left(\sqrt[2]{2-x} + \sqrt[2]{x}\right)^2$; $2x-1 \leq 2-x+x+2\sqrt{x(2-x)}$;

$2x-1 \leq 2+2\sqrt{2x-x^2}$; $2x-3 \leq 2\sqrt{2x-x^2}$;

$2\sqrt{2x-x^2} \geq 2x-3$

Quest'ultima disequazione è del secondo tipo. Essa si risolve considerando i due sistemi:

$\begin{cases} 2x-3 < 0 \\ 2x-x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\vee$ $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ (2x-3)^2 \leq 4(2x-x^2) \end{cases}$

$\begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\vee$ $\begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 4x^2+9-12x \leq 8x-4x^2 \end{cases}$

Risolviamo $4x^2+9-12x \leq 8x-4x^2$; $8x^2-20x+9 \leq 0$;

$8x^2-20x+9=0$; $x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-72}}{8} = \dfrac{10 \pm \sqrt{28}}{8} =$ $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{28}}{8} = \dfrac{10-\sqrt{4\cdot 7}}{8} = \dfrac{10-2\sqrt{7}}{8} = \dfrac{5-\sqrt{7}}{4}$; $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{28}}{8} = \dfrac{10+\sqrt{4\cdot 7}}{8} = \dfrac{10+2\sqrt{7}}{8} = \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$

$\dfrac{5-\sqrt{7}}{4} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$

$0 \leq x < \dfrac{3}{2}$ $\vee$ $\begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{5-\sqrt{7}}{4} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4} \end{cases}$

$0 \leq x < \dfrac{3}{2}$ $\vee$ $\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$ $\Rightarrow$ $0 \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$

Ma queste soluzioni sono accettabili se rientrano nelle condizioni di esistenza (1) *, poste in precedenza.*

$\begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4} \\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{7}}{4}$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione data è $\boldsymbol{S} = \left\{ \boldsymbol{x} \;\; / \;\; \frac{1}{2} \leq \boldsymbol{x} \leq \frac{5+\sqrt{7}}{4} \right\}$

Esempio 4

$$\frac{\sqrt[2]{x^2-4x}}{3-\sqrt[2]{5-x}} \le 0$$

Le C. E. sono: $\begin{cases} x^2-4x \ge 0 \\ 5-x \ge 0 \\ 3-\sqrt[2]{5-x} \ne 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \le 0 \ \lor \ x \ge 4 \\ x \le 5 \\ x \ne -4 \end{cases}$ $\quad x < -4 \ \lor \ -4 < x \le 0 \ \lor \ 4 \le x \le 5 \quad (1)$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$N \ge 0 : \ \sqrt[2]{x^2-4x} \ge 0 \ ; \qquad x^2-4x \ge 0 \ ; \qquad x \le 0 \ \lor \ x \ge 4$

$D > 0 : \ 3-\sqrt[2]{5-x} > 0 \ ; \quad \sqrt[2]{5-x} < 3 \ ; \quad \begin{cases} 5-x \ge 0 \\ 3 \ge 0 \\ \left(\sqrt[2]{5-x}\right)^2 < 3^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 5 \\ \forall x \in R \\ 5-x < 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 5 \\ \forall x \in R \\ x > -4 \end{cases} \quad -4 < x \le 5$

Costruiamo il quadro dei segni:

			-4		0		$+4$		$+5$	
$N \ge 0$	$x \le 0 \ \lor \ x \ge 4$	+		+	●	−	●	+		+
$D > 0$	$-4 < x \le 5$	−	○	+		+		+	○	−
		−		+		−		+		−

Occorre accettare le soluzioni che rientrano nelle condizioni di esistenza (1), *poste in precedenza.*

Cioè occorre escludere dalle soluzioni gli intervalli $0 \le x \le 4 \quad e \quad x > 5$.

In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione data è: $\boldsymbol{S = \{ \ x \ / \ \ x < 4 \ \}}$.