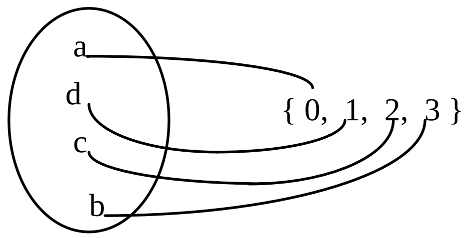
CALCOLO COMBINATORIO

Che cosa significa contare

Tutti conosciamo la successione dei numeri interi Naturali **N** = {0, 1, 2, 3, . . . } si tratta di una struttura mentale fondamentale, chiaramente presente alla nostra intuizione che non viene definita, ma assunta come un concetto intuitivo.
Questa successione è un insieme ordinato, che fa da insieme-campione per tutti i procedimenti del contare.
Dato un insieme finito **X**, contarlo significa porre una corrispondenza biunivoca fra esso e un "segmento iniziale" di questa successione.
Precisamente, diremo che X ha un numero cardinale **n** se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra l'insieme X e l'insieme {0,1,2,3, . . .n-1}.
Il numero cardinale di X verrà nel seguito indicato con **(X) #** .



Principio di conservazione del numero

Un insieme finito non può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.
In altre parole, un insieme finito non può essere messo in corrispondenza biunivoca con due distinti segmenti iniziali di N.
Tale principio non vale per gli insiemi infiniti. Infatti se consideriamo l'insieme dei numeri quadrati
A = {0, 1, 4, 9, 16, 25, . . .} esso può essere messo in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali.
N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .}.
In definitiva si hanno le seguenti difinizioni :
Un insieme A è **finito** se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra esso e un qualsiasi segmento iniziale di **N**.
Un insieme A è **infinito** se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra esso e una sua parte propria.

Operazioni

Siano A, B due insiemi finiti :
$(A \times B)\,\# \;=\; A\,\# \bullet B\,\#$
Se A e B sono disgiunti $\qquad (A \cup B)\,\# \;=\; A\,\# + B\,\#$
Se A e B non sono disgiunti $\qquad (A \cup B)\,\# \;=\; A\,\# + B\,\# - (A \cap B)\,\#$

<u>Dimostrazione di :</u> $(A \cup B)\,\# = A\,\# + B\,\# - (A \cap B)\,\#$

$(A \cup B)\,\# = \left[(A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B)\right]\# =$ essendo i tre insiemi disgiunti $\Rightarrow$

$= (A-B)\,\# + (B-A)\,\# + (A \cap B)\,\# = [\,A\,\# - (A \cap B)\,\#\,] + [\,B\,\# - (A \cap B)\,\#] + (A \cap B)\,\# =$

$= A\,\# - (A \cap B)\,\# + B\,\# - (A \cap B)\,\# + (A \cap B)\,\# = A\,\# + B\,\# - (A \cap B)\,\#$

Problema 1

Contare tutte le applicazioni di un insieme **X** di **k** elementi in un insieme **Y** di **n** elementi.

Ogni elemento del primo insieme può avere come corrispondente un elemento qualsiasi del secondo.
Pertanto per ogni elemento di X ci sono n applicazioni, ed avendo l'insieme X k elementi, le applicazioni in totale sono $n \cdot n \cdot n \cdot \cdot \cdot n = n^k$.

Sia X # = k e Y # = n . Indichiamo con $F_{n,k}$ il numero delle applicazioni $f : X \longrightarrow Y$.
Se k = 1 allora $F_{n,1} = n$
Se k = 2 allora $F_{n,2} = n \cdot n = n^2$
Se k = 3 allora $F_{n,3} = n \cdot n \cdot n = n^3$
Pertanto per k qualsiasi si ha $\mathbf{F_{n,k} = n^k}$

$F_{n,k}$ può essere visto come il numero dei modi con cui si possono disporre in fila k oggetti presi da un insieme di n oggetti, con possibilità di ripetizioni .

L'espressione $F_{n,k}$ può indicare il numero dei modi con cui m oggetti possono essere colorati con n colori, anche non diversi tra loro.
Il nome tradizionale con cui si indicano le file di m oggetti di n tipi, con possibilità di ripetizioni, è ***disposizioni con ripetizione*** e si indica con $\mathbf{D^{I}_{n,k} = n^{k}}$.

Problema 2
Contare tutte le applicazioni iniettive di un insieme **X** di **k** elementi in un insieme **Y** di **n** elementi.

Il primo elemento dell'insieme X può essere associato ad uno degli n elementi di Y;
Essendo poi, le applicazioni iniettive, dopo aver fissato la corrispondenza del primo elemento, il secondo può essere associato ad uno degli n-1 elementi di Y.
E cosi via il terzo elemento dell'insieme X può essere associato ad uno degli n-2 elementi di Y;

Sia $X\# = k$ e $Y\# = n$. Indichiamo con $D_{n,k}$ il numero delle applicazioni iniettive $f : X \longrightarrow Y$.
Se k = 1 allora $D_{n,1} = n$
Se k = 2 allora $D_{n,2} = n \cdot (n-1)$
Se k = 3 allora $D_{n,3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$
Pertanto per k qualsiasi si ha $\mathbf{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2). \; . \; . \; . \; (n - k + 1)}$

$D_{n,k}$ può essere visto come il numero dei modi con cui si possono disporre in fila k oggetti presi da un insieme di n oggetti .
L'espressione $D_{n,k}$ può indicare il numero dei modi con cui m oggetti possono essere colorati con n colori diversi tra loro.
Il nome tradizionale con cui si indicano questi allineamenti è ***disposizioni semplici*** .

<u>Osservazione</u>
Si ricorda che deve essere $n \geq k$, altrimenti non ci sono applicazioni iniettive. La cardinalità del codominio è sempre maggiore od uguale della cardinalità del dominio .

Teorema

$$\left(\text{Se} \quad \text{Dominio}\# = \text{Codominio}\# \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Ogni applicazione iniettiva è biunivoca} \\ \text{Ogni applicazione suriettiva è biunivoca} \end{pmatrix}$$

Se l'insieme Y = X, ogni applicazione $f : X \longrightarrow X$ (di X in sé) iniettiva è automaticamente bigettiva e, una applicazione suriettiva è automaticamente bigettiva.

Problema 3
Contare tutte le applicazioni bigettive di un insieme **X** di **n** elementi in se stesso.

Le applicazioni bigettive di **X** in sé non sono altro che le applicazioni iniettive del problema n°2, con k = n
Pertanto $\mathbf{D_{n,n}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2). \; . \; . \; . \; (n - n + 1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2). \; . \; . \; . 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{n\,!}$

Le applicazioni bigettive di un insieme finito in sé si dicono ***sostituzioni*** o ***permutazioni*** .
Il nome tradizionale con cui si indicano le permutazioni di n oggetti, è ***sostituzioni*** o ***permutazioni*** e si indica con $\mathbf{P_n}$. Ricordiamo che $\mathbf{P_n = D_{n,n} = n\,!}$.

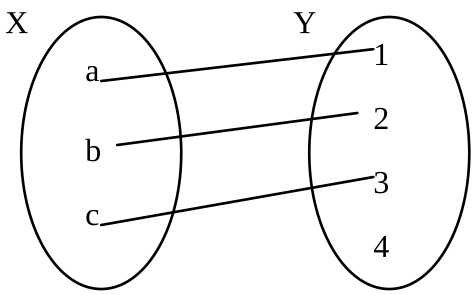
Problema 4
Determinare il numero dei sottoinsiemi di **k** elementi che si possono estrarre da un insieme di **n** elementi $(\mathbf{0 \le k \le n})$.

Indichiamo con $C_{n,k}$ il numero cercato.
Ricordiamo che le applicazioni iniettive di un insieme X di k elementi in un insieme Y di n elementi è $D_{n,k}$
Osserviamo che queste applicazioni possono essere ripartite in tante classi mettendo in una stessa classe quelle che hanno la stessa immagine.
Notiamo che, essendo esse iniettive, la loro immagine ha in ogni caso k elementi.
Dunque, il numero di queste classi è uguale al numero dei sottoinsiemi di k elementi che si possono estrarre dall'insieme Y, cioè è uguale a $C_{n,k}$.
Calcoliamo ora il numero delle applicazioni contenute in ciascuna classe, evidentemente esse sono k **!** , infatti se consideriamo un sottoinsieme qualsiasi T di Y costituito da k elementi, le applicazioni iniettive di X (fatto di k elementi) in K (formato anch'esso da k elementi) sono **k ! .**
E questo numero è uguale per tutte le classi.

Allora possiamo stabilire la seguente relazione : $\mathbf{D_{n,k} = C_{n,k} \bullet k\,!}$
Pertanto $\mathbf{C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k\,!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \;.\;.\;.\; \cdot (n-k+1)}{k\,!}}$ moltiplicando numeratore e denominatore per (n – k) ! si ottiene :

$$\mathbf{C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \;.\;.\;.\; \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k\,! (n-k)!} = \frac{n\,!}{k\,! \cdot (n-k)!}}$$

La notazione che si applica più frequentemente per indicare le **combinazioni semplici** di elementi k a k è :
$C_{n,k} = \mathbf{\dbinom{n}{k} = \dfrac{n\,!}{k\,! \cdot (n-k)!}}$.



A maggior facciamo un Esempio :

Siano X = {a, b, c} e Y = {1, 2, 3, 4} due insiemi.
In questo caso k = 3 e n = 4 .

Le classi delle applicazioni iniettive che hanno le stesse immagini sono :

C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**
{(a,1) , (b,2) , (c,3)}	{(a,1) , (b,2) , (c,4)}	{(a,1) , (b,3) , (c,4)}	{(a,2) , (b,3) , (c,4)}
{(a,1) , (b,3) , (c,2)}	{(a,1) , (b,4) , (c,2)}	{(a,1) , (b,4) , (c,3)}	{(a,2) , (b,4) , (c,3)}
{(b,1) , (a,2) , (c,3)}	{(b,1) , (a,2) , (c,4)}	{(b,1) , (a,3) , (c,4)}	{(b,2) , (a,3) , (c,4)}
{(b,1) , (a,3) , (c,2)}	{(b,1) , (a,4) , (c,2)}	{(b,1) , (a,4) , (c,3)}	{(b,2) , (a,4) , (c,3)}
{(c,1) , (a,2) , (b,3)}	{(c,1) , (a,2) , (b,4)}	{(c,1) , (a,3) , (b,4)}	{(c,2) , (a,3) , (b,4)}
{(c,1) , (a,3) , (b,2)}	{(ac1) , (a,4) , (b,2)}	{(c,1) , (a,4) , (b,3)}	{(c,2) , (a,4) , (b,3)}

Queste classi sono n = 4 , ed in ognuna di esse figurano k ! = 3 ! = 3 • 2 = 6 funzioni iniettive.

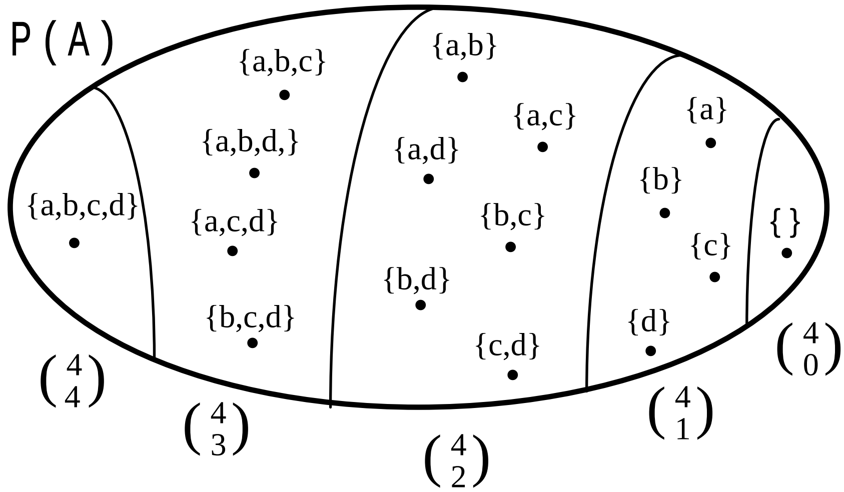
$C_{n,1} = \dbinom{n}{0} = 1$ Infatti il numero di sottoinsiemi di zero elementi che si possono estrarre da un insieme di n elementi è 1, cioè è soltanto l'insieme vuoto.

$C_{n,n} = \dbinom{n}{n} = 1$ Infatti il numero di sottoinsiemi di n elementi che si possono estrarre da un insieme di n elementi è 1, cioè è soltanto l'insieme medesimo.

Facciamo un esempio con gli insiemi :

Consideriamo l'insieme A = {a, b, c, d} e rappresentiamo graficamente l'insieme parti di A, $P(A)$ suddividendolo in sottoinsiemi di insiemi che contengono zero elementi, un elemento, due elementi, tre elementi e quattro elementi .
Dal grafico si osserva che i sottoinsiemi di k elementi sono tanti quanti

$C_{n,k} = \binom{n}{k}$



Lo sviluppo del binomio

Sappiamo calcolare :

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = xx + xy + yx + yy = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y) = xxx + xxy + xyx + yxx + yyx + yxy + xyy + yyy = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Troviamo adesso una regola generale per $(x+y)^n$

Guardando anche gli esempi precedenti, osserviamo che nello sviluppo del binomio, compare una somma di 2^n prodotti (ognuno formato da n fattori che possono essere uguali a x oppure a y).
Applicando la proprietà commutativa e raccogliendo tutti i termini che hanno lo stesso numero di x e di y (questi sono tanti quanti sono i modi di selezionare k caselle fra n caselle date, e cioè $\binom{n}{k}$) , possiamo concludere con la seguente formula :

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{m}x^{n-m}y^m + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

od anche : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{m} x^k\, y^{n-k}$

Esercizio 1
Dieci alpinisti, per attraversare un ghiacciaio, si legano in cordata, in modo però che due di loro, che sono principianti, non siano né al primo né all'ultimo posto. In quanti modi diversi possono farlo ?

no									no

Determiniamo in quanti modi posso inserire l'alpinista principiante A e l'alpinista principiante B nelle 8 celle dalla 2 alla 9 (la cella 1 e la cella 10 non possono essere utilizzate perché principianti). Essi sono $D_{8,2}$
Dopo aver sistemato i due alpinisti principianti, occorre sistemare gli altri 8 negli altri 8 posti disponibili.
Il numero di queste sistemazioni è $D_{8,8} = P_8 = 8\,!$.
In definitiva le diverse cordate sono : $D_{8,2} \cdot P_8 = 8\cdot 7 \;\cdot\; 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 2.257.920$.

Esercizio 2
Quanti sono i numeri di ottocifre che si possono scrivere senza utilizzare lo zero ? Fra essi sono in numero maggiore quelli in cui compare la cifra 1, o quelli in cui non compare ?

Se eliminiamo lo zero le cifre a disposizione sono 9 : 1,2,3,4,5,6,7,8,9 . Con queste nove cifre occorre fare numeri (raggruppamenti) di 8 cifre. Pertanto essi sono $D^{I}_{9,8} = 9^{8} = 43.046.721$.
Di questi quelli che non contengono il numero 1 sono $D^{I}_{8,8} = 8^{8} = 16.777.216$, poiché sono i raggruppamenti di 8 cifre con le 8 cifre 2,3,4,5,6,7,8,9 (non c'è il numero 1).
Mentre i numeri che contengono il numero 1 sono $D^{I}_{9,8} - D^{I}_{8,8} = 43.046.721 - 16.777.216 = 26.269.505$.
Pertanto sono in numero maggiore quelli che contengono il numero 1.

Esercizio 3
Si devono suddividere 33 ragazzi per formare tre squadre di calcio. In quanti modi diversi lo si può fare ?

Occorre fare dei raggruppamenti di 11 elementi con i 33 a disposizione . Si intuisce che i gruppi sono differenti solo per natura e non per ordine. Pertanto sono $C_{33,11} = \dfrac{33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}$