MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Il moto circolare uniforme è il moto di un corpo che si muove con velocità di modulo costante su una superficie piana e lungo una traiettoria circolare.

Nel moto circolare uniforme, anche se il modulo della velocità è costante, la direzione e il verso della velocità variano in ogni istante. Pertanto il moto circolare uniforme è un moto accelerato.

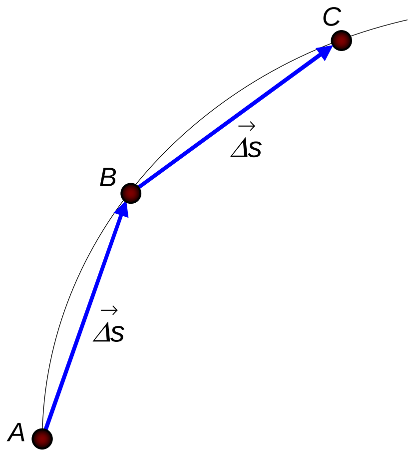
Infatti, poiché gli spostamenti $\vec{\Delta s}$ cambiano continuamente direzione, ed essendo il vettore velocità media $\vec{v} = \frac{\vec{\Delta s}}{\Delta t}$,

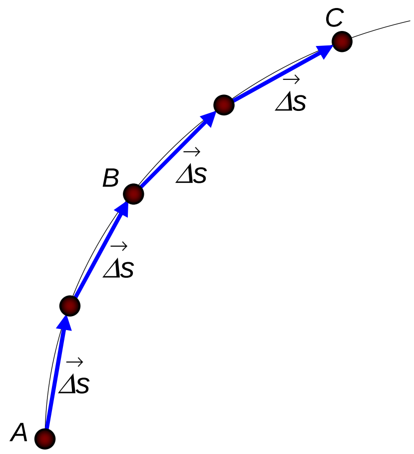
anche il vettore velocità varia continuamente.

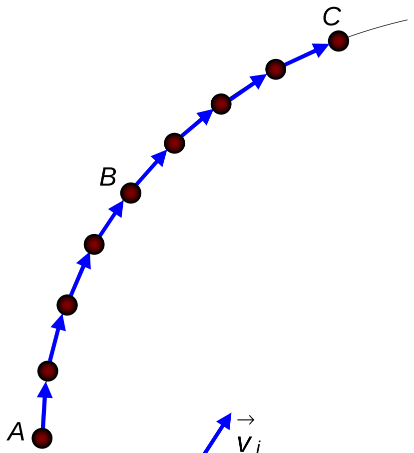
Anche se i moduli degli spostamenti compiuti in intervalli di tempo uguali sono uguali, la direzione e il verso degli spostamenti cambiano continuamente.

Per conoscere la direzione del vettore spostamento in un dato istante si considerano spostamenti sempre più piccoli lungo la traiettoria circolare.

Si trova così che la direzione del vettore spostamento in un punto (in un dato istante) è uguale alla direzione della retta tangente alla circonferenza in quel punto.

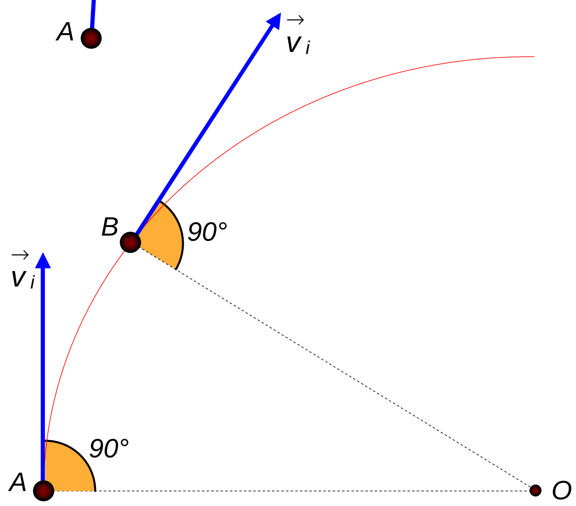






Anche se i moduli dei vettori velocità istantanea sono uguali in ogni punto della traiettoria circolare, i vettori velocità istantanea cambiano continuamente perché cambiano le loro direzioni, che sono uguali a quelli degli spostamenti.

Pertanto anche la direzione del vettore velocità istantanea in un punto è tangente alla traiettoria circolare in quel punto, cioè perpendicolare al raggio della traiettoria circolare che passa per quel punto.



La velocità tangenziale

Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante, pertanto il corpo percorre archi di circonferenza uguali in tempi uguali.

L'intervallo di tempo impiegato dal corpo per compiere un giro completo è chiamato ***periodo*** T .

La ***frequenza*** è il numero di giri compiuti nell'unità di tempo $f = \frac{1}{T}$. Essa si misura in giri al secondo (s^{-1}) o *Hertz*.

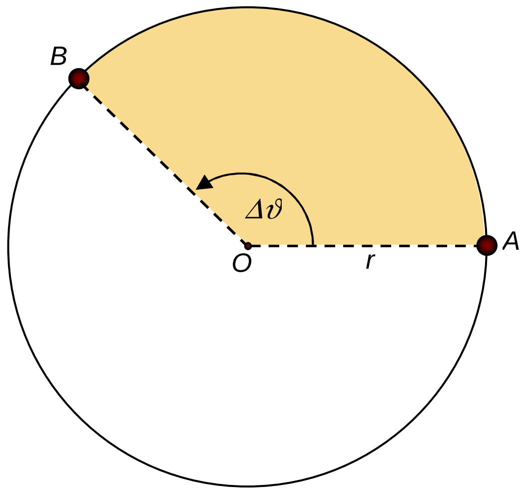
La *velocità tangenziale* è la velocità di un corpo che si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio r e che impiega un tempo T per percorrere l'intera circonferenza.

La ***velocità tangenziale*** ha modulo costante $\boxed{v = \frac{2\,\pi\,r}{T}}$, mentre la sua direzione, in ogni punto, è quella della retta tangente alla circonferenza in quel punto.

Dalla formula si osserva che la velocità tangenziale è direttamente proporzionale al raggio.

La velocità angolare

La ***velocità angolare*** (o velocità radiale) esprime la rapidità con cui il raggio, che collega il centro della circonferenza al corpo, descrive l'angolo al centro corrispondente all'arco di circonferenza percorso dal corpo.



Il modulo della velocità angolare media è il rapporto tra lo spostamento angolare del corpo e l'intervallo di tempo impiegato a compiere tale spostamento, $\omega = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$.

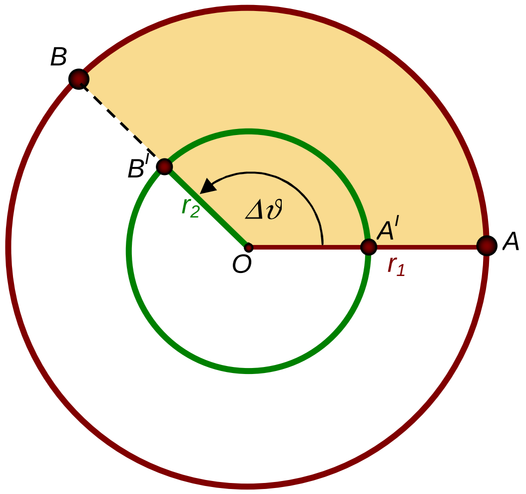
La velocità angolare si misura in Rad/s. Essendo il radiante un numero puro, la dimensione della velocità angolare è t^{-1}.

Il vettore $\vec{\omega}$ è un vettore avente direzione perpendicolare al piano della circonferenza e verso dalla parte dell'osservatore che vede ruotare il punto materiale in senso antiorario.

Un corpo che si muove di moto circolare uniforme percorre archi uguali in intervalli di tempo uguali, e quindi il raggio che passa per esso descrive angoli al centro uguali in intervalli di tempo uguali.

Pertanto il modulo della velocità angolare è costante.

Il modulo della velocità angolare media è: $\boxed{\omega = \frac{2\,\pi}{T}}$.



Considerato che, nel moto circolare uniforme, la velocità angolare media assume valori costanti, si ha che essa coincide con la velocità angolare istantanea.

Da tale formula si osserva che la velocità angolare, a differenza della velocità tangenziale, non dipende dal raggio della circonferenza.

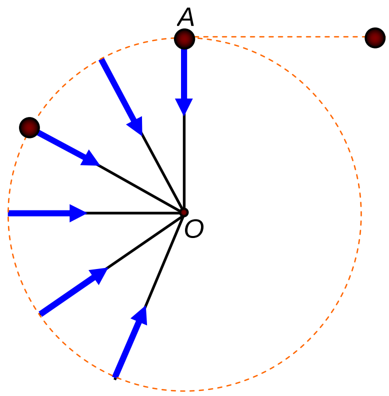
Dal grafico a lato si osserva che corpi che descrivono angoli al centro uguali in intervalli di tempo uguali hanno la stessa velocità angolare, ma percorrono archi di circonferenza diversi a seconda della loro distanza dal centro della circonferenza, e quindi hanno velocità tangenziali diverse.

La relazione fra le due velocità, angolare e tangenziale è: $\boxed{v = \omega \cdot r}$.

La forza centripeta

il moto circolare uniforme è un moto accelerato perché la direzione della sua velocità cambia punto per punto.

Pertanto, per la seconda legge della dinamica $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, su un corpo che si muove di moto circolare uniforme deve agire una forza risultante non equilibrata.



Un esempio di moto circolare uniforme in cui è facile individuare la forza che fa variare la velocità dell'oggetto è quello del lancio del martello, in cui una persona fa ruotare sopra la propria testa una palla legata a un'estremità di una cordicella.

La persona esercita la forza sulla cordicella, e quindi sulla palla che ruota. Tale forza è diretta secondo la direzione della cordicella e verso l'atleta, il quale rappresenta il centro della traiettoria circolare della palla. Per questo motivo la forza che agisce in un moto circolare ha il nome di forza centripeta (forza diretta verso il centro).

Nell'istante in cui il lanciatore lascia la cordicella, la palla non si muove più sulla circonferenza ma vola via lungo una traiettoria rettilinea.

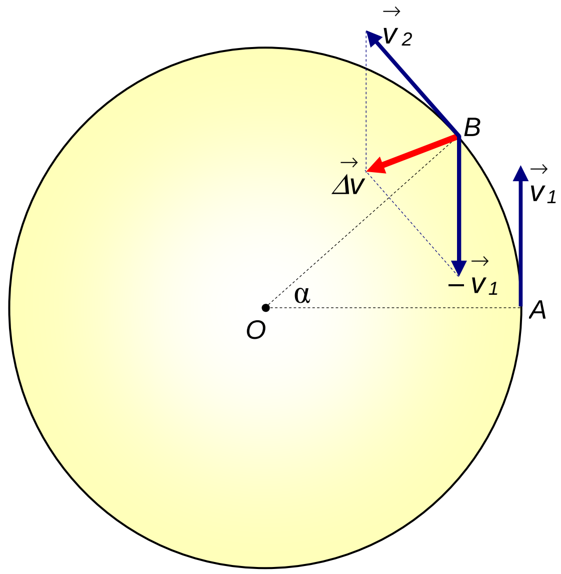
Infatti per le leggi della dinamica, trascurando in una prima analisi la forza di gravità, nel momento in cui viene a mancare la forza centripeta del lanciatore sulla palla non agisce più alcuna forza e perciò, per la seconda legge di Newton, essa non può accelerare.

Per il principio d'inerzia, la palla continua a muoversi con velocità costante, cioè continua a muoversi con velocità uguale, in modulo, direzione e verso, a quella che aveva nel momento in cui la cordicella è stata lasciata.

L'accelerazione centripeta

La forza centripeta è diretta verso il centro della circonferenza. Dalla seconda legge di Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, essendo la massa una grandezza scalare, si deduce che anche l'accelerazione $\vec{a}$, detta accelerazione centripeta è diretta verso il centro della circonferenza.

Dimostriamo che il suo modulo vale: $\boxed{a_C = \frac{v^2}{R}}$



Calcoliamo innanzitutto la direzione e il verso del vettore accelerazione media $\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$.

Consideriamo pertanto, due istanti successivi t_1 e t_2, cui sono associati i vettori velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Il vettore variazione di velocità $\vec{\Delta v} = \vec{\Delta v}_2 - \vec{\Delta v}_1 = \vec{\Delta v}_2 + \left(-\vec{\Delta v}_1 \right)$

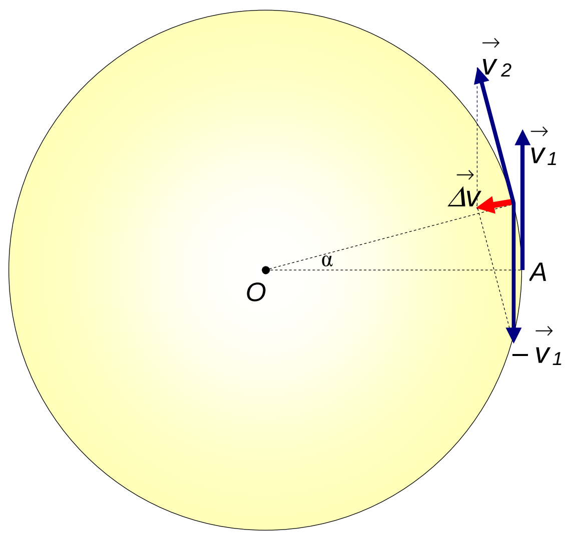
Dalla rappresentazione grafica si osserva che il vettore $\vec{\Delta v}$ è diretto verso l'interno della circonferenza.

Pertanto anche il vettore accelerazione media $\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$ è diretto verso l'interno della circonferenza.

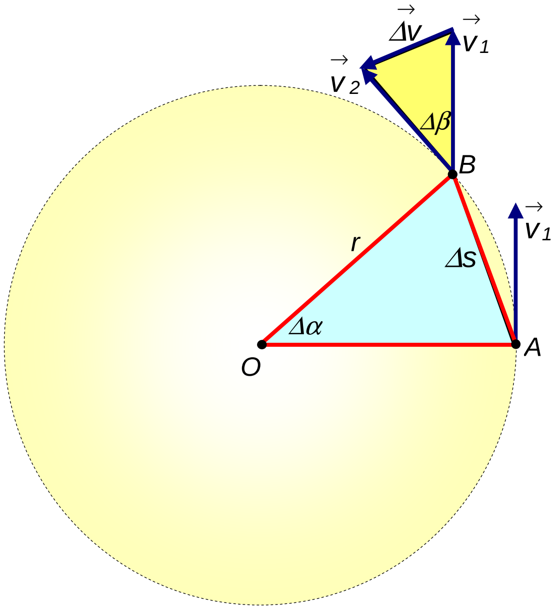
Per la determinazione dell'accelerazione istantanea, occorre considerare due istanti t_1 e t_2 sempre più vicini. Occorre cioè far tendere a zero l'intervallo di tempo $\vec{\Delta t} = \vec{t_2} - \vec{t_1}$.

In questa situazione limite:

- l'angolo α tra i due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ tende ad annullarsi.
- il vettore $\vec{\Delta v}$ tende a diventare perpendicolare al vettore velocità $\vec{v}$ e tende a dirigersi verso il centro della circonferenza.
- il vettore accelerazione istantanea $\vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$ tende a dirigersi verso il centro della circonferenza.



Per la determinazione del modulo dell'accelerazione istantanea, consideriamo i due triangoli $\overset{\Delta}{OAB}$ e $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{\Delta v}$. I due triangoli sono simili.



- sono due triangoli isosceli: $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ e $v_1 = v_2 = v$.
- Gli angoli $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ sono uguali, perché i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono perpendicolari ai raggi OA e OB.

Per la similitudine si ha: $\Delta s : r = \Delta v : v$ da cui: $\Delta v = \dfrac{\Delta s \cdot v}{r}$.

Dividendo per Δt si ha: $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \dfrac{v}{r}$ (*).

Nella situazione limite di $\Delta t \to 0$ si ha:

- il segmento Δs tende ad assumere la misura dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ e quindi il modulo della velocità tende al valore $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.
- il rapporto $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ rappresenta l'accelerazione centripeta istantanea $\vec{a}_i$.

Sostituendo tali relazioni nella (*) si ha: $a_i = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \dfrac{v}{r} = \dfrac{v^2}{r}$.

Poiché la relazione dipende soltanto da grandezze costanti *(modulo della velocità e raggio)*, l'accelerazione istantanea ha modulo costante. Inoltre, essendo la relazione indipendente dall'intervallo di tempo Δt, essa coincide, in modulo, con l'accelerazione media.

In definitiva vale la seguente relazione: $\boxed{a_c = a_i = a_m = \dfrac{v^2}{r}}$.

Sostituendo in quest'ultima la relazione $v = \omega \cdot r$ si ottiene: $\boxed{a_c = \varpi^2 \cdot r}$.

Infine, ricordando la definizione di prodotto vettoriale, se $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare e $\vec{v}$ il vettore velocità tangenziale, l'accelerazione centripeta in un qualunque punto P della traiettoria circolare è espressa, in modulo, direzione e verso, dal prodotto vettoriale: $\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v}$.