

# MOMENTO DI UNA FORZA E DI UNA COPPIA DI FORZE

## Esercizi

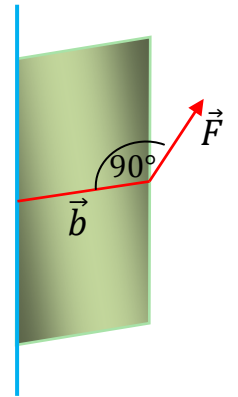
### Esempio 1

Calcola il momento della forza con cui si apre una porta, ruotando in verso antiorario, nell'ipotesi che l'intensità della forza applicata perpendicolarmente al braccio sia  $F = 20\text{ N}$  e il braccio  $b = 35\text{ cm}$ .

Soluzione

Il momento è:  $M = F b = 20\text{ N} \cdot 0,35\text{ m} = 7\text{ N} \cdot \text{m}$ .

Il segno del momento è positivo perché la porta ruota in verso antiorario.



### Esempio 2

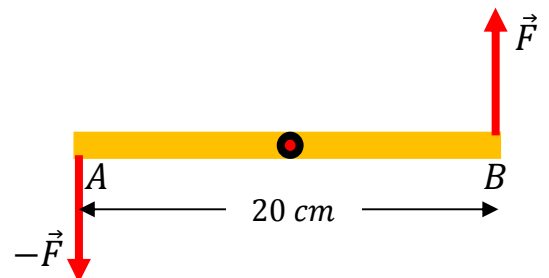
Calcola il momento della coppia di forze che agisce sulla chiave doppia, sapendo che  $AB = 20\text{ cm}$ ,  $F = 100\text{ N}$  e l'angolo tra la forza  $F$  e la congiungente  $AB$  vale  $90^\circ$ .

Soluzione

Il momento della coppia di forze è:

$M = F b = 100\text{ N} \cdot 0,2\text{ m} = 20\text{ N} \cdot \text{m}$ .

Il segno del momento è positivo perché il corpo ruota in senso antiorario.



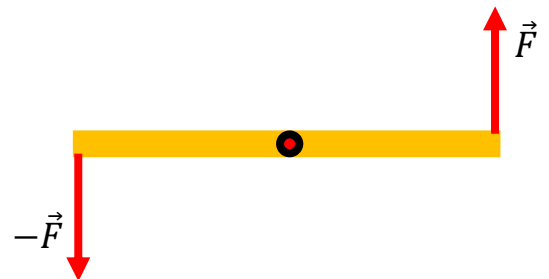
### Esempio 3

Calcola il braccio della coppia di forze in figura, sapendo che il modulo della forza  $F = 200\text{ N}$  e  $M = 40\text{ N} \cdot \text{m}$ .

Soluzione

Il braccio della coppia di forze è:

$$b = \frac{M}{F} = \frac{40\text{ N} \cdot \text{m}}{200\text{ N}} = 0,2\text{ m}.$$



### Esempio 4

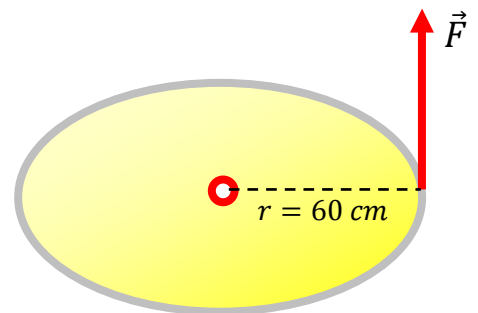
Un corpo rigido di massa  $m = 15\text{ kg}$  in figura, è sottoposto all'azione di una forza  $F = 120\text{ N}$ . Qual è il momento risultante che agisce sul corpo, sapendo che esso è libero di ruotare intorno al suo centro su un piano verticale, ma non può traslare?

Soluzione

Se il corpo non può traslare occorre considerare solo il momento risultante.

$M = F b = 120\text{ N} \cdot 0,6\text{ m} = 72\text{ N} \cdot \text{m}$ .

Il segno del momento è positivo perché il corpo ruota in senso antiorario.



### Esempio 5

Un ragazzo cerca di aprire una porta spingendo sulla maniglia in direzione perpendicolare al piano della porta. Il fratello cerca di impedirglielo spingendo sulla porta dalla parte opposta. Se la distanza della maniglia dai cardini è di 80 cm, e la forza con cui il ragazzo spinge è di 30 N, quale forza dovrà esercitare il fratello perché la porta non si apra, se spinge sempre in direzione perpendicolare al piano della porta ma a una distanza di 40 cm dai cardini?

#### Soluzione

Affinchè la porta non ruoti i momenti delle due forze devono essere uguali:

$$F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2 ; \quad 30 \text{ N} \cdot 0,8 \text{ m} = F_2 \cdot 0,4 \text{ m} ; \quad F_2 = \frac{30 \text{ N} \cdot 0,8 \text{ m}}{0,4 \text{ m}} = 60 \text{ N} .$$

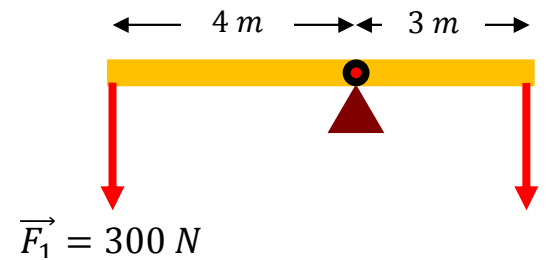
### Esempio 6

Due bambini sono in equilibrio a cavalcioni di una tavola lunga 7 m, ciascuno a una estremità. Se la tavola è poggiata su un punto che dista 4 m dall'estremità su cui si trova un bambino che pesa 300 N, quanto pesa l'altro bambino?

#### Soluzione

Essendo la tavola in equilibrio, i due momenti devono essere uguali ed opposti.

$$P_1 \cdot b_1 = P_2 \cdot b_2 ; \\ 300 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} = P_2 \cdot 3 \text{ m} ; \\ P_2 = \frac{300 \text{ N} \cdot 4 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 400 \text{ N} .$$



### Esempio 7

Tre forze  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  di modulo  $F_1 = F_2 = 20 \text{ N}$  e  $F_3 = 40 \text{ N}$ , sono applicate a una sbarra come nella figura a lato. Qual è il modulo del momento di ciascuna forza rispetto al punto medio  $M$  della sbarra?

Qual è il momento risultante rispetto al punto medio  $M$  della sbarra?

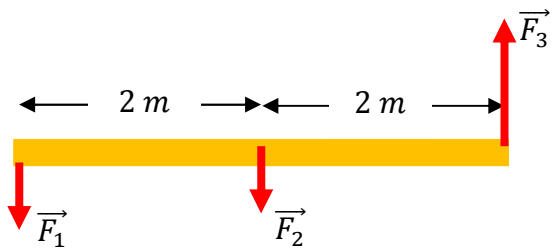
#### Soluzione

I moduli dei momenti di ciascuna forza rispetto al punto medio della sbarra sono:

$$M_1 = F_1 \cdot b_1 = 20 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 40 \text{ N} \cdot \text{m} . \\ M_2 = F_2 \cdot b_2 = 20 \text{ N} \cdot 0 \text{ m} = 0 . \\ M_3 = F_3 \cdot b_3 = 40 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 80 \text{ N} \cdot \text{m} .$$

Il momento risultante rispetto al punto medio della sbarra è la somma dei singoli momenti, ognuno con il proprio segno:

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3 = (40 + 0 + 80) \text{ N} \cdot \text{m} = 120 \text{ N} \cdot \text{m} .$$



### Esempio 8

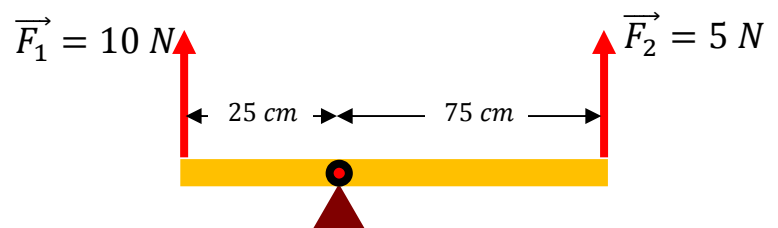
Un'asta lunga 1 m è vincolata in un punto distante 25 cm dal suo estremo sinistro. A essa sono applicate due forze di intensità  $\vec{F}_1 = 10 \text{ N}$  e  $\vec{F}_2 = 5 \text{ N}$ .

Calcola il momento risultante e l'eventuale verso di rotazione dell'asta.

#### Soluzione

Il momento risultante è dato dalla somma dei due momenti,  $M_2$  positivo e  $M_1$  negativo.

$$M_R = M_1 + M_2 = \\ = F_2 \cdot b_2 - F_1 \cdot b_1 = \\ = 5 \text{ N} \cdot 0,75 \text{ m} - 10 \text{ N} \cdot 0,25 \text{ m} = \\ = 3,75 \text{ N} \cdot \text{m} - 2,5 \text{ N} \cdot \text{m} = \\ = 1,25 \text{ N} \cdot \text{m} . \quad \text{L'asta ruota in verso antiorario.}$$



# EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

## Esercizi

### Esempio 1

Due persone spingono contemporaneamente una porta larga  $90\text{ cm}$ . La prima applica una forza  $F_1 = 40\text{ N}$  perpendicolarmente al piano della porta e a una distanza di  $80\text{ cm}$  dal suo asse di rotazione.

La seconda spinge dalla parte opposta, perpendicolarmente alla porta con una forza  $F_2 = 80\text{ N}$  alla distanza di  $50\text{ cm}$  dall'asse di rotazione.

Che cosa succede alla porta? Rimane in equilibrio o ruota? Si apre o si chiude?

#### Soluzione

Essendo la porta vincolata sui cardini, non può traslare, ma può solamente ruotare.

Se il momento risultante delle due forze rispetto all'asse di rotazione non è nullo, la porta ruota nel verso indicato dal momento maggiore.

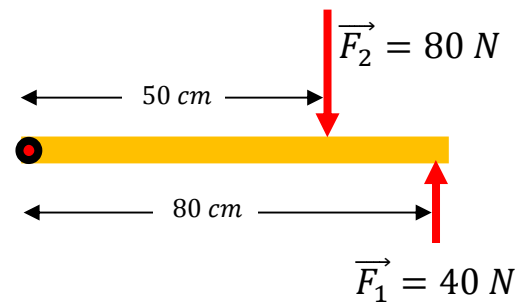
Il momento risultante è dato dalla somma dei due momenti

$M_1$  positivo e  $M_2$  negativo.

Il momento risultante è:

$$M_R = M_1 + M_2 = F_1 \cdot b_1 - F_2 \cdot b_2 = 40\text{ N} \cdot 0,8\text{ m} - 80\text{ N} \cdot 0,5\text{ m} = 32\text{ N} \cdot \text{m} - 40\text{ N} \cdot \text{m} = -8\text{ N} \cdot \text{m}.$$

L'asta ruota in verso orario.



### Esempio 2

Date due forze  $F_A = 30\text{ N}$  ed  $F_B = 20\text{ N}$ , parallele e discordi, applicate nei punti A e B di una sbarra lunga  $1\text{ m}$ , determina la loro risultante e il suo punto di applicazione, sapendo che  $AB = 30\text{ cm}$ .

#### Soluzione

La forza risultante ha modulo:

$$F_R = F_A - F_B = 30\text{ N} - 20\text{ N} = 10\text{ N}.$$

Il punto di applicazione  $P$  è dato dalla relazione:

$$PA : PB = F_B : F_A$$

$$PA : PB = 20\text{ N} : 30\text{ N}$$

$$PA = \frac{20\text{ N} \cdot PB}{30\text{ N}}; \quad PA = \frac{2}{3}PB;$$

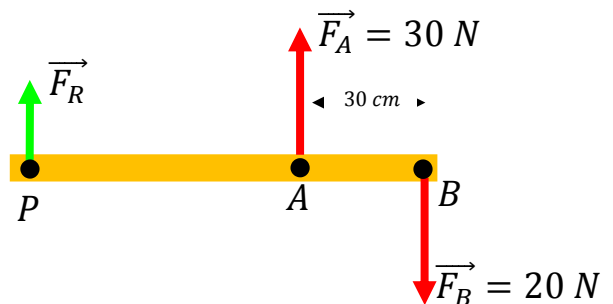
Essendo le due forze parallele e discordi, la loro risultante è esterna al segmento AB.

Ponendo  $PB = x$  si ottiene  $PA = \frac{2}{3}x$

Dalla relazione  $PB - PA = AB$  si ottiene:

$$x - \frac{2}{3}x = 30; \quad 3x - 2x = 90; \quad x = 90.$$

Pertanto  $PB = 90\text{ cm}$  e  $PA = \frac{2}{3} \cdot 90\text{ cm} = 60\text{ cm}$ .

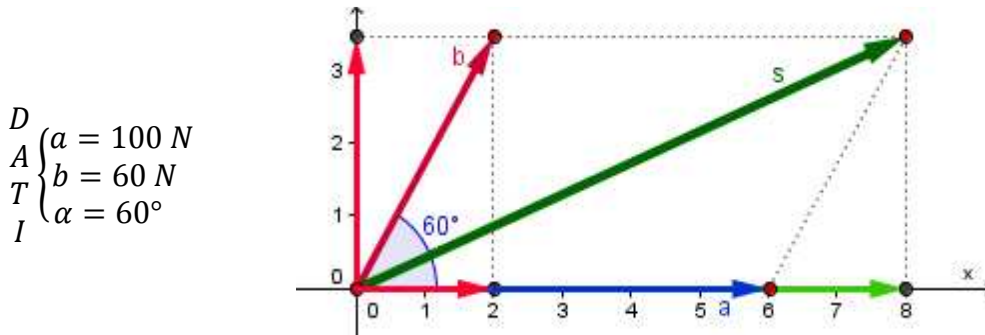


### Esempio 3

Due forze concorrenti di intensità rispettivamente 100 N e 60 N sono applicate a un corpo rigido. Calcola il modulo della loro risultante, sapendo che le loro rette di azione formano un angolo di  $60^\circ$ .

#### Soluzione

Per semplificare i calcoli rappresentiamo i due vettori in un sistema di assi cartesiani in cui il primo vettore  $\vec{a}$  ha la direzione e il verso dell'asse  $x$ .



$$\begin{array}{l} D \\ A \\ T \\ I \end{array} \begin{cases} a = 100 \text{ N} \\ b = 60 \text{ N} \\ \alpha = 60^\circ \end{cases}$$

Vettore somma  $\vec{r}$  ?

In questo sistema di riferimento le componenti cartesiane dei due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono:

$$\begin{aligned} a_x &= a = 100 \text{ N} & b_x &= b \cos 60^\circ = 60 \cdot \frac{1}{2} \text{ N} = 30 \text{ N} \\ a_y &= 0 & b_y &= b \sin 60^\circ = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N} = 30\sqrt{3} \text{ N} \end{aligned}$$

Le componenti cartesiane del vettore somma sono:

$$s_x = a_x + b_x = (100 + 30) \text{ N} = 130 \text{ N} \quad s_y = a_y + b_y = (0 + 30\sqrt{3}) \text{ N} = 30\sqrt{3} \text{ N} .$$

Il modulo del vettore somma è:

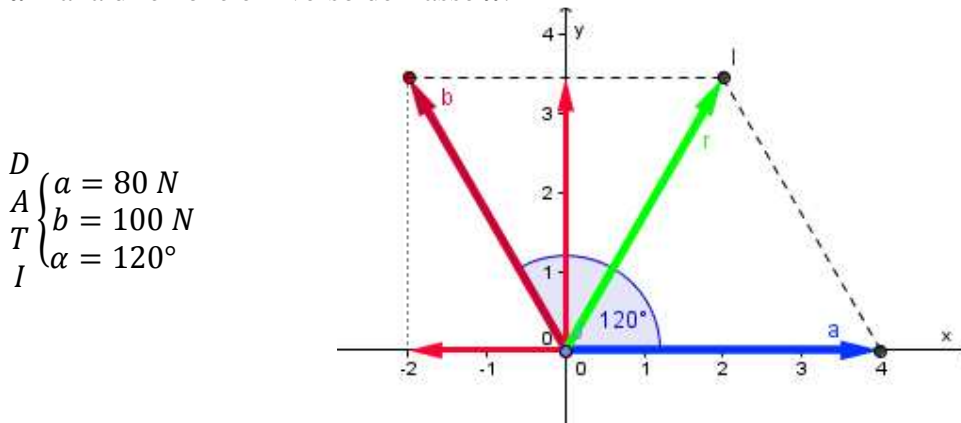
$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(130 \text{ N})^2 + (30\sqrt{3} \text{ N})^2} = \sqrt{16900 \text{ N}^2 + 2700 \text{ N}^2} = \sqrt{19600 \text{ N}^2} = 140 \text{ N} .$$

### Esempio 4

Due forze concorrenti di intensità 80 N e 100 N sono applicate a un corpo rigido. Se le due forze formano un angolo di  $120^\circ$ , qual è il modulo della forza risultante?

#### Soluzione

Per semplificare i calcoli rappresentiamo i due vettori in un sistema di assi cartesiani in cui il primo vettore  $\vec{a}$  ha la direzione e il verso dell'asse  $x$ .



$$\begin{array}{l} D \\ A \\ T \\ I \end{array} \begin{cases} a = 80 \text{ N} \\ b = 100 \text{ N} \\ \alpha = 120^\circ \end{cases}$$

Vettore somma  $\vec{s}$  ?

In questo sistema di riferimento le componenti cartesiane dei due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono:

$$\begin{aligned} a_x &= a = 80 \text{ N} & b_x &= b \cos 120^\circ = 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ N} = -50 \text{ N} \\ a_y &= 0 & b_y &= b \sin 120^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N} = 50\sqrt{3} \text{ N} \end{aligned}$$

Le componenti cartesiane del vettore somma sono:

$$s_x = a_x + b_x = (80 - 50) \text{ N} = 30 \text{ N} \quad s_y = a_y + b_y = (0 + 50\sqrt{3}) \text{ N} = 50\sqrt{3} \text{ N} .$$

Il modulo della forza risultante è:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(30 \text{ N})^2 + (50\sqrt{3} \text{ N})^2} = \sqrt{(900 + 7500) \text{ N}^2} = \sqrt{8400 \text{ N}^2} \cong 91,7 \text{ N} .$$

### Esempio 5

A un'asta rigida lunga  $4\text{ m}$  sono applicate, perpendicolarmente a essa, due forze nei punti A e B, distanti  $1\text{ m}$ , rispettivamente di  $50\text{ N}$  e  $30\text{ N}$ , con verso opposto. Determina la loro risultante e il suo punto di applicazione.

#### Soluzione

Le forze hanno verso opposto e quindi il vettore risultante ha modulo uguale alla differenza dei moduli delle due forze:

$$F_R = F_A - F_B = 50\text{ N} - 30\text{ N} = 20\text{ N}.$$

Per determinare il punto di applicazione  $P$ ,  
poniamo  $\overline{PA} = x \Rightarrow \overline{PB} = x + 1$ .

Dalla relazione  $PA : PB = F_B : F_A$  si ottiene:

$$x : (x + 1) = 30\text{ N} : 50\text{ N} \quad \text{cioè:}$$

$$\frac{x}{x + 1} = \frac{30}{50}; \quad 50 \cdot x = 30 \cdot (x + 1); \quad 50x = 30x + 30; \quad 20x = 30; \quad x = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Pertanto  $\overline{PA} = 1,5\text{ m}$ .

