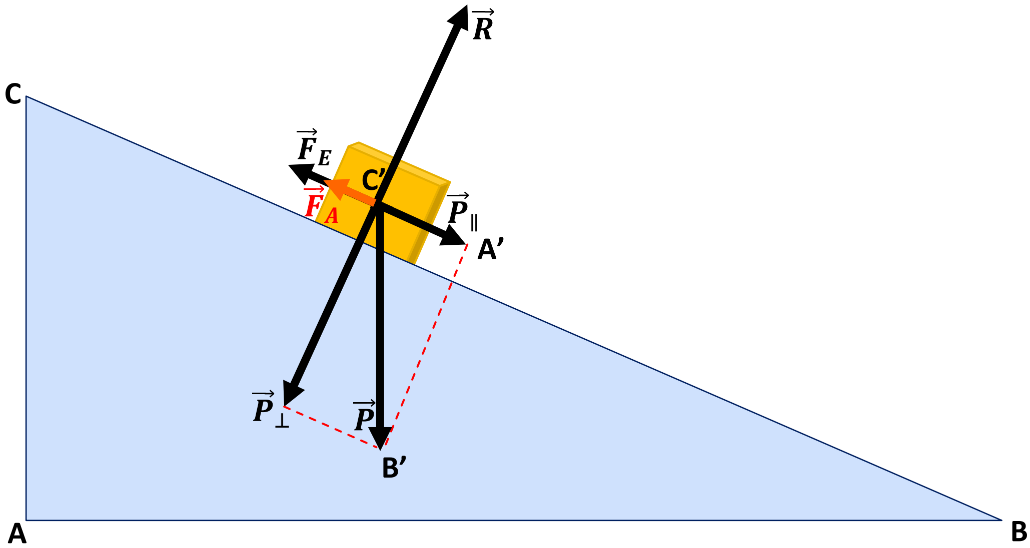
EQUILIBRIO SU UN PIANO INCLINATO

Esercizi

Esempio 1

Un corpo di peso $200\,N$ è in equilibrio su un piano inclinato privo di attrito avente altezza $h = 3\,m$ e lunghezza $l = 10\,m$. Determina il modulo della forza parallela al piano che lo tiene in equilibrio.
Quanto vale il modulo della forza se il coefficiente di attrito statico tra il corpo e il piano vale 0,2 ?



Soluzione

In assenza di attrito la forza da equilibrare è la componente della forza Peso parallela al piano inclinato $\vec{P}_\parallel$.
La forza equilibrante $\vec{F}_E$ ha lo stesso modulo e la stessa direzione della forza $\vec{P}_\parallel$ ma verso opposto.

$$F_E = P_\parallel = P \cdot \frac{h}{l} = 200\,N \cdot \frac{3\,m}{10\,m} = 60\,N\,.$$

In presenza di attrito la forza da equilibrare è la componente della forza Peso parallela al piano inclinato $\vec{P}_\parallel$ diminuita della forza di attrito F_A che si oppone al movimento del corpo.
La forza equilibrante $\vec{F}_E$ ha la stessa direzione della forza $\vec{P}_\parallel$ ma verso opposto.

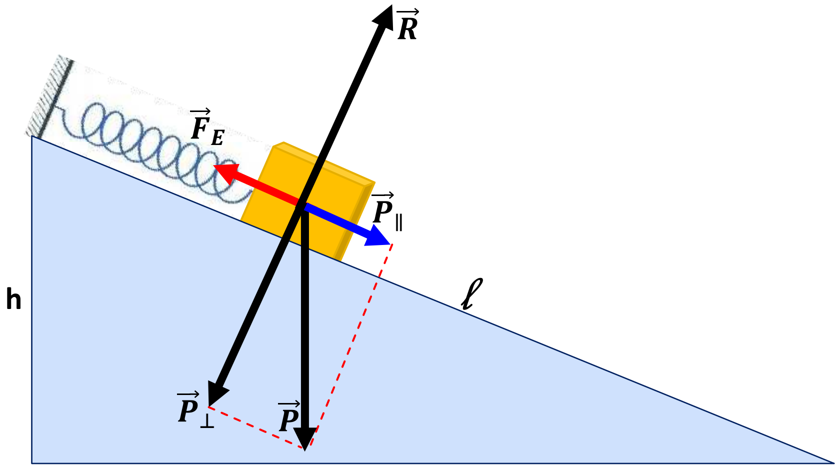
$$F_E = P_\parallel - F_A = P \cdot \frac{h}{l} - k_s \cdot P_\perp = P \cdot \frac{h}{l} - k_s \cdot P \cdot \cos\alpha = 200\,N \cdot \frac{3\,m}{10\,m} - 0{,}2 \cdot 200\,N \cdot \cos\alpha =$$

$$= 200\,N \cdot \frac{3\,m}{10\,m} - 0{,}2 \cdot 200\,N \cdot \frac{\sqrt{91}}{10} = 60\,N - 38{,}2\,N = 21{,}8\,N\,.$$

dove $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{100}} = \sqrt{\frac{91}{100}} = \frac{\sqrt{91}}{10}$

Esempio 2

Un corpo di peso 60 N è in equilibrio su un piano inclinato senza attrito alto $4\,m$ e lungo $6\,m$, trattenuto da una molla avente costante elastica $k = 100\,N/m$. Di quanto si allunga la molla rispetto alla posizione di equilibrio?



<u>*Soluzione*</u>

Il corpo è sottoposto alla forza peso $\vec{P}$ e alla forza elastica della molla $\vec{F_E} = -k \cdot \vec{s}$.

La componente perpendicolare al piano del peso $\vec{P_\perp}$ viene annullata dalla reazione vincolare $\vec{R}$ del piano.

La componente parallela al piano della forza peso $\vec{P_\parallel}$ (causa dell'allungamento della molla) e la forza elastica $\vec{F_E}$ agiscono nella stessa direzione, ma con versi opposti.

Pertanto, nella situazione di equilibrio i loro moduli sono uguali:

$P_\parallel = F_E$; $\qquad P \cdot \frac{h}{l} = k \cdot s$;

Da questa relazione si ricava lo spostamento:

$$s = \frac{P}{k} \cdot \frac{h}{l} = \frac{60\,N}{100\,N/m} \cdot \frac{4\,m}{6\,m} = 0{,}4\,m\,.$$

Oppure

si calcola prima:

$$P_\parallel = P \cdot \frac{h}{l} = 60\,N \cdot \frac{4\,m}{6\,m} = 40\,N\,.$$

In seguito, essendo $P_\parallel = F_E$, si determina lo spostamento:

$$s = \frac{F_E}{k} = \frac{P_\parallel}{k} = \frac{40\,N}{100\,N/m} = 0{,}4\,m\,.$$

Esempio 3

Un corpo di peso 60 N è in equilibrio su un piano inclinato senza attrito trattenuto da una molla. L'angolo di inclinazione del piano è di $30°$, l'allungamento della molla è di $30\ cm$. Quanto vale la costante della molla?

Soluzione

Come nel problema precedente, il corpo è sottoposto alla forza peso $\vec{P}$ e alla forza elastica $\overrightarrow{F_E} = -k \cdot \vec{s}$.

La componente perpendicolare al piano del peso $\overrightarrow{P_\perp}$ viene annullata dalla reazione vincolare $\vec{R}$ del piano.

La componente parallela al piano della forza peso $\overrightarrow{P_\parallel}$ (causa dell'allungamento della molla) e la forza elastica $\overrightarrow{F_E}$ agiscono nella stessa direzione, ma con versi opposti.

Pertanto, nella situazione di equilibrio i loro moduli sono uguali:

$P_\parallel = F_E$; $\qquad P \cdot sin\,\alpha = k \cdot s$;

Da questa relazione si ricava la costante della molla:

$$k = \frac{P}{s} \cdot sin\,\alpha = \frac{60\ N}{0{,}3\ m} \cdot sin\,30° = \frac{60\ N}{0{,}3\ m} \cdot \frac{1}{2} = 100\ N/m.$$

$Oppure$

si calcola prima:

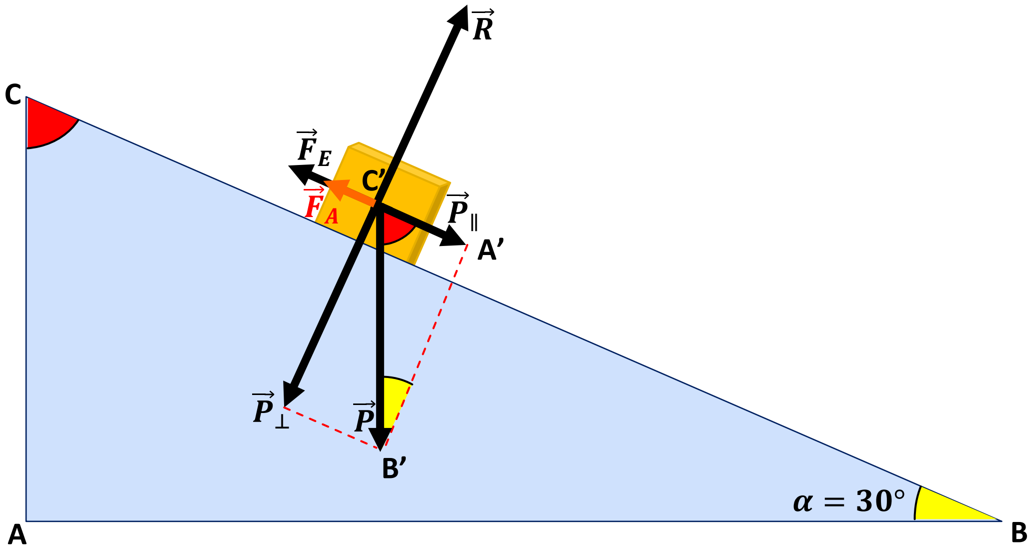
$P_\parallel = P \cdot sin\,\alpha = 60\ N \cdot sin\,30° = 30\ N$.

In seguito, essendo $P_\parallel = F_E$, si determina la costante della molla:

$$k = \frac{F_E}{s} = \frac{P_\parallel}{s} = \frac{30\ N}{0{,}3\ m} = 100\ N/m\ .$$

Esempio 4

Un corpo di peso $100\ N$ è in equilibrio su un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo di $30°$ rispetto al piano orizzontale. Determina il modulo della forza parallela al piano che lo tiene in equilibrio. Quanto vale il modulo della forza se il coefficiente di attrito statico tra il corpo e il piano vale 0,4 ?



<u>*Soluzione*</u>

In assenza di attrito la forza da equilibrare è la componente della forza Peso parallela al piano inclinato $\vec{P}_\parallel$

La forza equilibrante $\vec{F}_E$ ha lo stesso modulo e la stessa direzione della forza $\vec{P}_\parallel$ ma verso opposto.

$$F_E = P_\parallel = P \cdot \sin\alpha = 100\ N \cdot \sin 30° = 100\ N \cdot \frac{1}{2} = 50\ N\ .$$

In presenza di attrito la forza da equilibrare è la componente della forza Peso parallela al piano inclinato $\vec{P}_\parallel$ diminuita della forza di attrito F_A che si oppone al movimento del corpo**.**

La forza equilibrante $\vec{F}_E$ ha la stessa direzione della forza $\vec{P}_\parallel$ ma verso opposto.

Il suo modulo è $F_E = P_\parallel - F_A = P \cdot \sin\alpha - k_s \cdot P_\perp = P \cdot \sin\alpha - k_s \cdot P \cdot \cos\alpha =$

$$= 100\ N \cdot \sin 30 - 0{,}4 \cdot 100\ N \cdot \cos 30 = 100\ N \cdot \frac{1}{2} - 0{,}4 \cdot 100\ N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\ N - 34{,}6\ N = 15{,}4\ N.$$

Esempio 5

Una cassa di peso $600\ N$ è in equilibrio su un piano inclinato privo di attrito che forma un un angolo di $60°$ rispetto al piano orizzontale. Determina il modulo della forza parallela al piano che lo tiene in equilibrio. Quanto vale il modulo della forza se il coefficiente di attrito statico tra il corpo e il piano vale 0,3 ?

<u>Soluzione</u>

In assenza di attrito, come nel problema precedente, la forza equilibrante $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{E}}$ ha lo stesso modulo e la stessa direzione della forza $\vec{P}_{\parallel}$ ma verso opposto.

$$F_E \;=\; P_{\parallel} \;=\; P \cdot sin\,\alpha \;=\; 600\ N \cdot sin\,60° \;=\; 100\ N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \;=\; 520\ N\ .$$

In presenza di attrito la forza da equilibrare è la componente della forza Peso parallela al piano inclinato $\vec{P}_{\parallel}$ diminuita della forza di attrito F_A che si oppone al movimento del corpo**.**

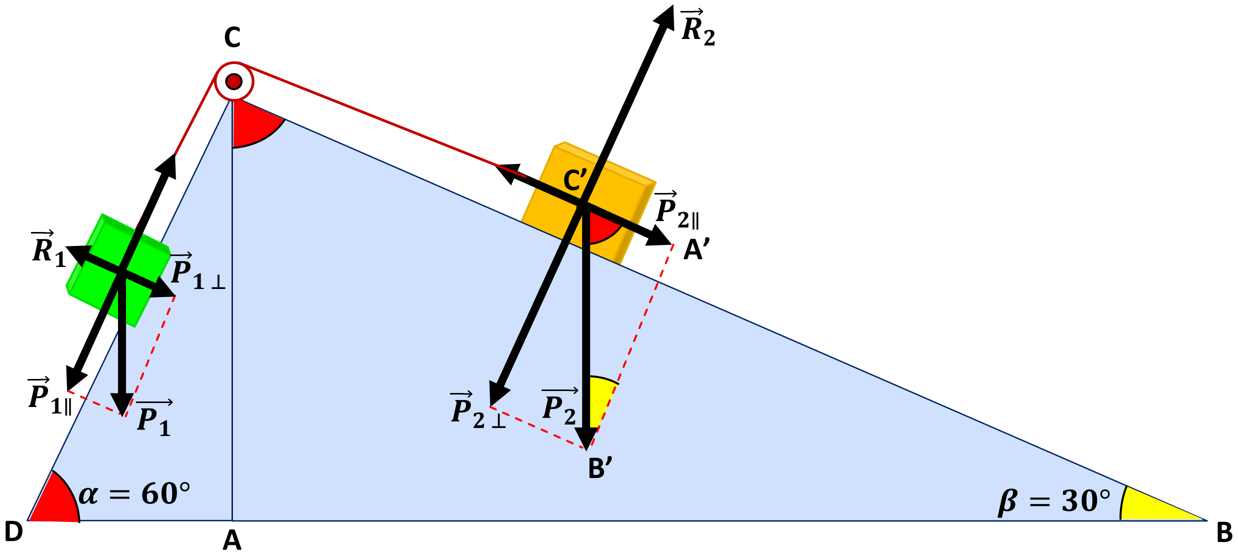
La forza equilibrante $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{E}}$ ha la stessa direzione della forza $\vec{P}_{\parallel}$ ma verso opposto.

Il suo modulo è $F_E \;=\; P_{\parallel} - F_A \;=\; P \cdot sin\,\alpha - k_s \cdot P_{\perp} \;=\; P \cdot sin\,\alpha - k_s \cdot P \cdot cos\,\alpha \;=$

$= 600\ N \cdot sin\,60 - 0{,}3 \cdot 600\ N \cdot cos\,60 \;=\; 600\ N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}3 \cdot 600\ N \cdot \frac{1}{2} \;=\; 520\ N - 90\ N = \; 430\ N.$

Esempio 6

Due corpi di peso rispettivamente $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ sono appoggiati a due piani inclinati di $\alpha = 60°$ e $\beta = 30°$ adiacenti. Determina il peso $\vec{P}_1$ sapendo che $\vec{P}_2 = 100\ N$ e supponendo trascurabile l'attrito.



Soluzione

In assenza di attrito, il sistema è in equilibrio quando le componenti di $\vec{P}_1$ e di $\vec{P}_2$ parallele ai rispettivi piani inclinati sono uguali in modulo.

$$P_{2\parallel} = P_2 \cdot \sin\beta = 100\ N \cdot \sin 30° = 100\ N \cdot \frac{1}{2} = 50\ N\ .$$

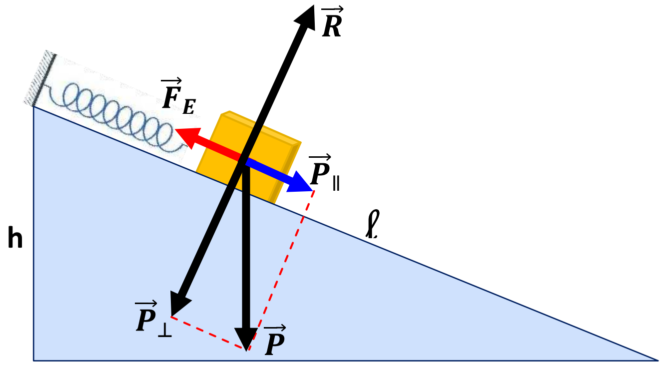
Pertanto anche il modulo di $P_{1\parallel} = 50\ N$.

Da questo dato si può ricavare il valore del peso del primo corpo.

$$P_1 = \frac{P_{1\parallel}}{\sin\alpha} = \frac{50\ N}{\sin 60°} = 57{,}7\ N\ .$$

Esempio 7

Di quanto si allunga una molla di costante elastica $k = 150\ N/m$, se un corpo ad essa agganciato di peso $P = 120\ N$ è in equilibrio su un piano inclinato alto $1\ m$ e lungo $4\ m$?



Soluzione

Il corpo è sottoposto alla forza peso $\vec{P}$ e alla forza elastica della molla $\overrightarrow{F_E} = -k \cdot \vec{s}$.

La componente perpendicolare al piano del peso $\overrightarrow{P_\perp}$ viene annullata dalla reazione vincolare $\vec{R}$ del piano.

La componente parallela al piano della forza peso $\overrightarrow{P_\parallel}$ (causa dell'allungamento della molla) e la forza elastica $\overrightarrow{F_E}$ si contrappongono nella stessa direzione.

Pertanto, nella situazione di equilibrio i loro moduli sono uguali:

$P_\parallel = F_E$; $\qquad P \cdot \frac{h}{l} = k \cdot s$;

Da questa relazione si ricava lo spostamento:

$$s = \frac{P}{k} \cdot \frac{h}{l} = \frac{120\ N}{150\ N/m} \cdot \frac{1\ m}{4\ m} = 0{,}2\ m\,.$$

Oppure

si calcola prima:

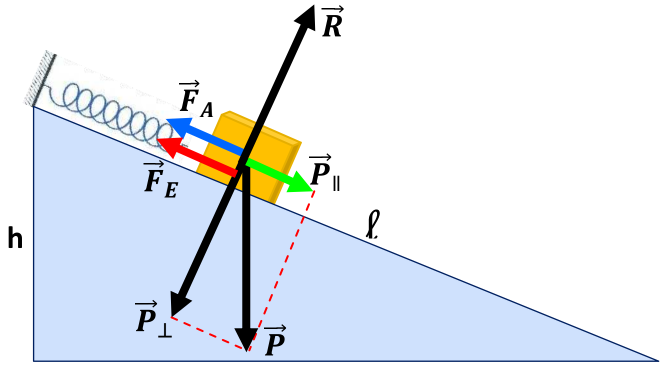
$$P_\parallel = P \cdot \frac{h}{l} = 120\ N \cdot \frac{1\ m}{4\ m} = 30\ N\,.$$

In seguito, essendo $P_\parallel = F_E$, si determina lo spostamento:

$$s = \frac{F_E}{k} = \frac{P_\parallel}{k} = \frac{30\ N}{150\ N/m} = 0{,}2\ m\,.$$

Esempio 8

Un corpo di peso $120\,\mathrm{N}$ è in equilibrio su un piano inclinato di 45° rispetto al piano orizzontale, trattenuto da una molla avente costante elastica $k = 150\,N/m$. Di quanto si allunga la molla rispetto alla posizione di equilibrio se il coefficiente di attrito del piano vale $k_a = 0{,}5$?



<u>*Soluzione*</u>

Il corpo è sottoposto alla forza peso $\vec{P}$ e alla forza elastica della molla $\overrightarrow{F_E} = -k \cdot \vec{s}$.

La componente perpendicolare al piano del peso $\overrightarrow{P_{\perp}}$ viene annullata dalla reazione vincolare $\vec{R}$ del piano.

Alla componente parallela al piano della forza peso $\overrightarrow{P_{\parallel}}$ (causa dell'allungamento della molla) sono contrapposte la forza elastica $\overrightarrow{F_E}$ e la forza di attrito $\overrightarrow{F_A}$.

Pertanto, nella situazione di equilibrio:

$P_{\parallel} = F_E + F_A$; $\quad P \cdot \sin\alpha = k \cdot s + k_a \cdot P_{\perp}$; $\quad P \cdot \sin\alpha = k \cdot s + k_a \cdot P \cdot \cos\alpha$

Da questa relazione si ricava lo spostamento:

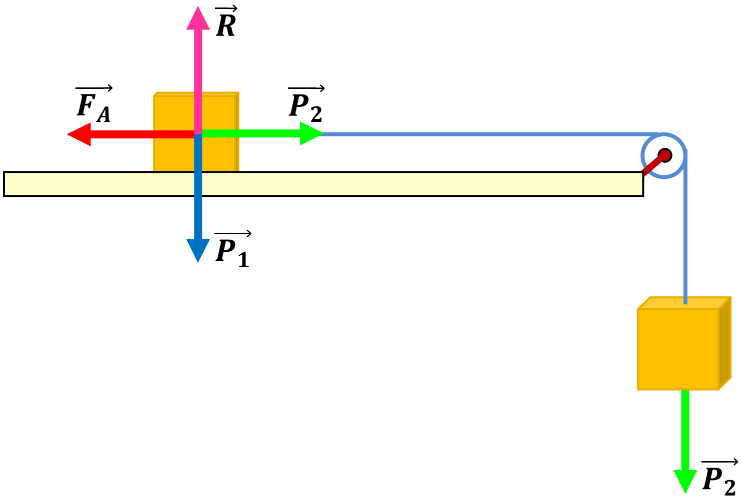
$-k \cdot s = -P \cdot \sin\alpha + k_a \cdot P \cdot \cos\alpha$; $\qquad k \cdot s = P \cdot \sin\alpha - k_a \cdot P \cdot \cos\alpha$;

$$s = \frac{P \cdot \sin\alpha - k_a \cdot P \cdot \cos\alpha}{k} = \frac{120\,N \cdot \sin 45 - 0{,}5 \cdot 120\,N \cdot \cos 45}{150\,N/m} =$$

$$= \frac{120\,N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}5 \cdot 120\,N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{150\,N/m} = \frac{60\sqrt{2}\,N - 30\sqrt{2}\,N}{150\,N/m} = \frac{30\sqrt{2}\,N}{150\,N/m} = 0{,}2\,m\,.$$

Esempio 9

Un corpo di peso $P_1 = 200 \text{ N}$ è appoggiato su un piano orizzontale e collegato tramite una fune e una carrucola a un corpo appeso alla fune stessa. Sapendo che il coefficiente di attrito statico sul piano è $k_s = 0{,}2$, determina il peso minimo del corpo appeso in grado di mettere in movimento il sistema.



<u>*Soluzione*</u>

Il sistema è così definito:

La forza peso $\overrightarrow{P_1}$ è controbilanciata dalla reazione vincolare $\vec{R}$ del piano.

La forza peso $\overrightarrow{P_2}$ è la forza necessaria a vincere la forza di attrito $\overrightarrow{F_A}$.

Quindi il peso minimo per far muovere il blocco è:

$P_{2\,MIN} = k_s \cdot P_1 = 0{,}2 \cdot 200 \text{ N} = 40 \text{ N}$.