

Equazioni goniometriche

Equazioni goniometriche elementari (I° tipo)

L'equazione goniometrica elementare: $\sin x = m$ ammette soluzioni se: $-1 \leq m \leq 1$

Le soluzioni sono date da:

$$x = \alpha + 2k180^\circ$$
$$x = 180^\circ + \alpha + 2k180^\circ$$

L'equazione goniometrica elementare: $\cos x = n$ ammette soluzioni se: $-1 \leq n \leq 1$

Le soluzioni sono date da:

$$x = \mp \alpha + 2k180^\circ$$

L'equazione goniometrica elementare: $\tan x = p$ ammette soluzioni $\forall p \in R$

Le soluzioni sono date da:

$$x = \alpha + k180^\circ$$

Equazioni goniometriche elementari (II° tipo)

Le soluzioni dell'equazione: $\sin x = \sin y$ sono date da:

$$x - y = 2k180^\circ$$
$$x + y = (2k + 1)180^\circ$$

Le soluzioni dell'equazione: $\cos x = \cos y$ sono date da:

$$x - y = 2k180^\circ$$
$$x + y = 2k180^\circ$$

Le soluzioni dell'equazione: $\tan x = \tan y$ sono date da:

$$x - y = k180^\circ$$

Equazioni lineari in seno e coseno

Un'equazione lineare in seno e coseno è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x + c = 0$$

Essa può essere trasformata nell'equazione goniometrica fondamentale:

$$A \operatorname{sen}(x + \alpha) + c = 0 \quad \text{con} \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Dimostrazione

Applicando la formula di addizione all'equazione: $A \operatorname{sen}(x + \alpha) + c = 0$ si ha:

$$A \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} \alpha + A \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} \alpha + c = 0.$$

Quest'ultima è equivalente alla prima equazione se:
$$\begin{cases} A \operatorname{cos} \alpha = a \\ A \operatorname{sen} \alpha = b \end{cases}$$

elevando ambo i membri al quadrato si ha:
$$\begin{cases} A^2 \operatorname{cos}^2 \alpha = a^2 \\ A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = b^2 \end{cases}$$

e sommando membro a membro si ottiene: $A^2 \operatorname{cos}^2 \alpha + A^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = a^2 + b^2$

cioè: $A^2 \cdot (\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = a^2 + b^2$; $A^2 = a^2 + b^2$; $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Mentre dal sistema:
$$\begin{cases} A \operatorname{cos} \alpha = a \\ A \operatorname{sen} \alpha = b \end{cases}$$
 dividendo membro a membro si ottiene: $\frac{A \operatorname{sen} \alpha}{A \operatorname{cos} \alpha} = \frac{b}{a}$ cioè $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

Equazioni goniometriche omogenee

Un'equazione omogenea in seno e coseno è un'equazione che, ridotta a forma normale, è del tipo:

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x + c \operatorname{cos}^2 x = 0$$

Essa si trasforma in un'equazione lineare mediante le formule:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{cos} 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

$$\operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \operatorname{cos} 2x}{2}$$