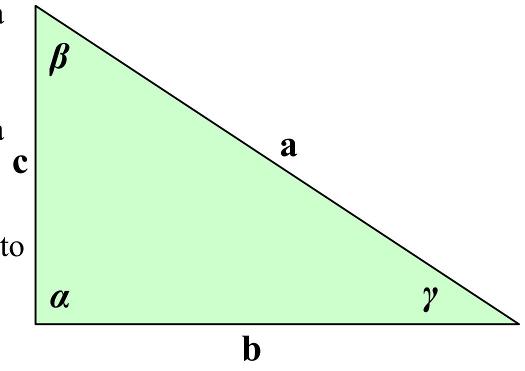
Triangolo rettangolo

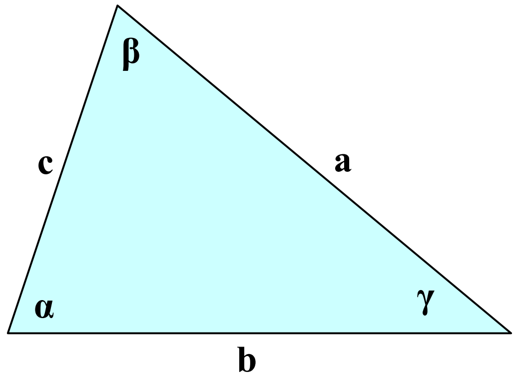
In un triangolo rettangolo :



- un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto.
  $b = a \cdot sen\,\beta$ $\quad$ $c = a \cdot sen\,\gamma$
- un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto.
  $b = a \cdot cos\,\gamma$ $\quad$ $c = a \cdot cos\,\beta$
- un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto.
  $b = c \cdot tg\,\beta$ $\quad$ $c = b \cdot tg\,\gamma$

Triangolo qualsiasi

In un triangolo qualsiasi valgono i seguenti tre teoremi :



Teorema dei Seni

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma} = 2R$$

(R = raggio della circonferenza circoscritta al triangolo)

Teorema di Carnot

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\alpha$	$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,\alpha}$	$cos\,\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\beta$	$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\beta}$	$cos\,\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma$	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma}$	$cos\,\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Teorema delle proiezioni

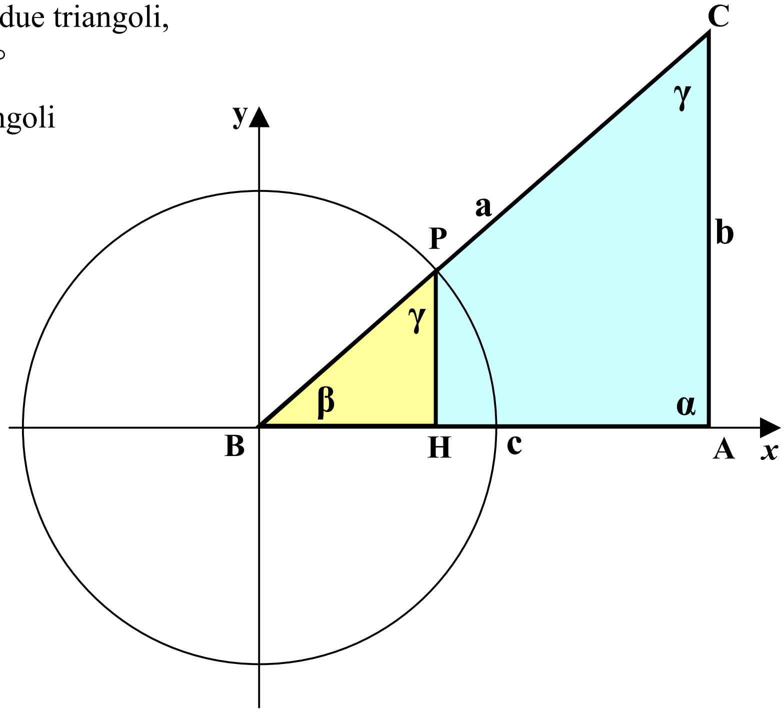
$a = b \cdot cos\,\gamma + c \cdot cos\,\beta$ $\qquad$ $b = a \cdot cos\,\gamma + c \cdot cos\,\alpha$ $\qquad$ $c = a \cdot cos\,\beta + b \cdot cos\,\alpha$

Triangolo rettangolo

I due triangoli OPH e ABC sono simili, infatti:

- l'angolo β è in comune ai due triangoli,
- l'angolo $B\hat{H}P = B\hat{A}C = 90°$

Pertanto i lati corrispondenti dei due triangoli sono proporzionali:



1. BH : AB = BP : BC e cioè
$\cos\beta : \text{cateto c} = 1 : \text{ipotenusa}$
$\text{cateto c} = \text{ipotenusa} \cdot \cos\beta$

2. PH : AC = BP : BC e cioè
$\text{sen}\beta : \text{cateto b} = 1 : \text{ipotenusa}$
$\text{cateto b} = \text{ipotenusa} \cdot \text{sen}\beta$

3. BH : AB = PH : AC e cioè
$\cos\beta : \text{cateto c} = \text{sen}\beta : \text{cateto b}$
$\text{cateto b} = \dfrac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} \cdot \text{cateto c}$
$\text{cateto b} = \text{cateto c} \cdot \text{tg}\beta$

ma $\cos\beta = \text{sen}\gamma$, $\text{sen}\beta = \cos\gamma$ e $\text{tg}\beta = \text{Cotg}\,\gamma = \dfrac{1}{\text{tg}\gamma}$ perché angoli complementari, quindi:

la relazione (1) $\text{cateto c} = \text{ipotenusa} \cdot \cos\beta$ diventa $\text{cateto c} = \text{ipotenusa} \cdot \text{sen}\gamma$

la relazione (2) $\text{cateto b} = \text{ipotenusa} \cdot \text{sen}\beta$ diventa $\text{cateto b} = \text{ipotenusa} \cdot \cos\gamma$

la relazione (3) $\text{cateto b} = \text{cateto c} \cdot \text{tg}\beta$ diventa $\text{cateto b} = \text{cateto c} \cdot \dfrac{1}{\text{tg}\gamma}$

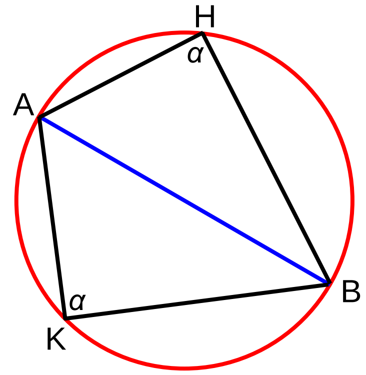
da cui si ha: $\text{cateto c} = \text{cateto b} \cdot \text{tg}\gamma$

Concludendo si è ottenuto:

$\text{cateto b} = \text{ipotenusa} \cdot \text{sen}\beta$	$\text{cateto b} = \text{ipotenusa} \cdot \cos\gamma$	$\text{cateto b} = \text{cateto c} \cdot \text{tg}\beta$
$\text{cateto c} = \text{ipotenusa} \cdot \text{sen}\gamma$	$\text{cateto c} = \text{ipotenusa} \cdot \cos\beta$	$\text{cateto c} = \text{cateto b} \cdot \text{tg}\gamma$
Che equivale a scrivere		
Un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto.	Un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto.	Un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto.

Teorema della corda

La lunghezza di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto del diametro per il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi determinati dalla corda stessa.

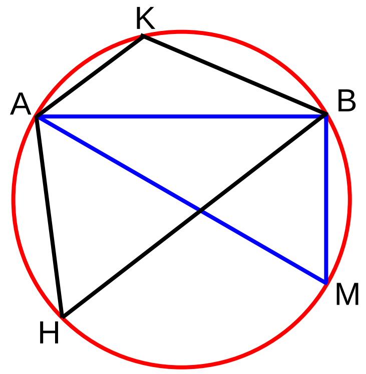


<u>*Dimostrazione*</u>

I° Caso - la corda coincide con il diametro ($AB = 2r$)

gli archi $\overset{\frown}{AB}$ sottesi dalla corda sono due semicirconferenze, gli angoli alla circonferenza che insistono su tali archi sono retti e quindi: $sen\,\alpha = 1$. Perciò risulta: $AB = 2r \cdot sen\alpha = 2r \cdot 1 = 2r$

II° Caso - la corda non coincide con il diametro ($AB \neq 2r$)



Sia AM il diametro. Il triangolo ABM è rettangolo in B.

Pertanto, per i teoremi sul triangolo rettangolo, risulta:

$AB = 2\,r\,sen\,A\hat{M}B$ *(I)*

Sia H un punto qualsiasi dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ contenente M .

Siccome incidono sullo stesso arco, risulta che: $A\hat{M}B = A\hat{H}B$.

Pertanto sostituendo tale uguaglianza nella *(I)* si ha:

$AB = 2\,r\,sen\,A\hat{H}B$ *(II)*

Sia K un punto qualsiasi dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ non contenente M .

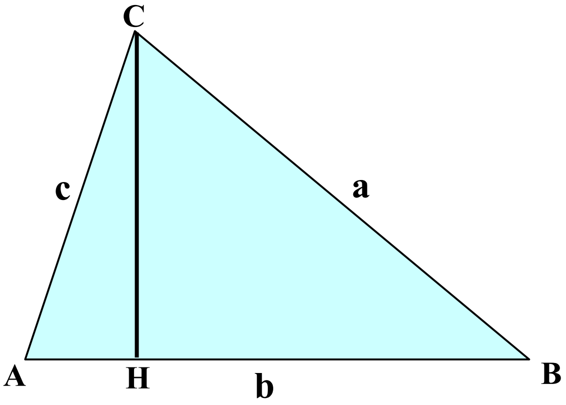
Ricordando che un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha angoli opposti supplementari,

si ha: $A\hat{K}B = 180° - A\hat{H}B$**. Di conseguenza si ha:** $sen\,A\hat{K}B = sen\left(180 - A\hat{H}B\right) = sen\,A\hat{H}B$ **.**

Sostituendo tale uguaglianza nella *(II)* si ottiene: $AB = 2\,r\,sen\,A\hat{K}B$**.**

Teorema delle proiezioni *(dimostrazione)*

<u>*I° Caso – ABC è un triangolo acutangolo*</u>



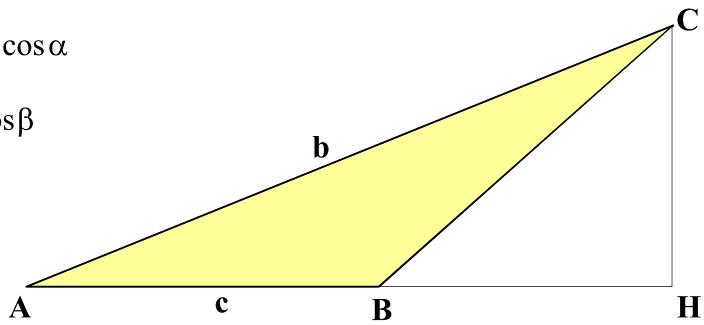
Nel triangolo rettangolo ACH si ha : $AH = c \cdot \cos\alpha$
Nel triangolo rettangolo BCH si ha : $BH = a \cdot \cos\gamma$
Pertanto il lato b = $AB = BH + AH = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha$

In definitiva $\mathbf{b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha}$

Analogamente le altre due formule :

$\mathbf{a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta}$
$\mathbf{c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha}$

<u>*II° Caso – ABC è un triangolo ottusangolo*</u>



Nel triangolo rettangolo ACH si ha : $AH = b \cdot \cos\alpha$
Nel triangolo rettangolo BCH si ha :
$BH = a \cdot \cos(180° - \beta) \;=\; a \cdot (-\cos\beta) \;=\; -a\cos\beta$
Pertanto c = AB = AH – BH =
$= \; b \cdot \cos\alpha \;-\; (-a\cos\beta) = \; b \cdot \cos\alpha \;+\; a\cos\beta$

In definitiva $\mathbf{c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha}$
Per le altre due formule si procede analogamente ai casi precedenti.

Teorema di Carnot *(dimostrazione)*

Dalle formule del Teorema delle Proiezioni :

$\mathbf{a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta}$	Moltiplichiamo per a	$a^2 = ab \cdot \cos\gamma + ac \cdot \cos\beta$
$\mathbf{b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha}$	Moltiplichiamo per –b	$-b^2 = -ab \cdot \cos\gamma - bc \cdot \cos\alpha$
$\mathbf{c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha}$	Moltiplichiamo per –c	$-c^2 = -ac \cdot \cos\beta - bc \cdot \cos\alpha$

Sommando membro a membro si ottiene:

$a^2 - b^2 - c^2 = \cancel{ab \cdot \cos\gamma} + \cancel{ac \cdot \cos\beta} - \cancel{ab \cdot \cos\gamma} - bc \cdot \cos\alpha - \cancel{ac \cdot \cos\beta} - bc \cdot \cos\alpha$;

Cioè : $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos\alpha$ e in definitiva $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

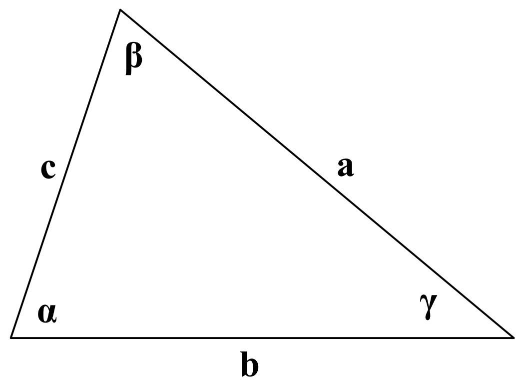
Si procede in modo analogo per le altre due formule :

$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}$ e $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$

Teorema dei Seni (dimostrazione)

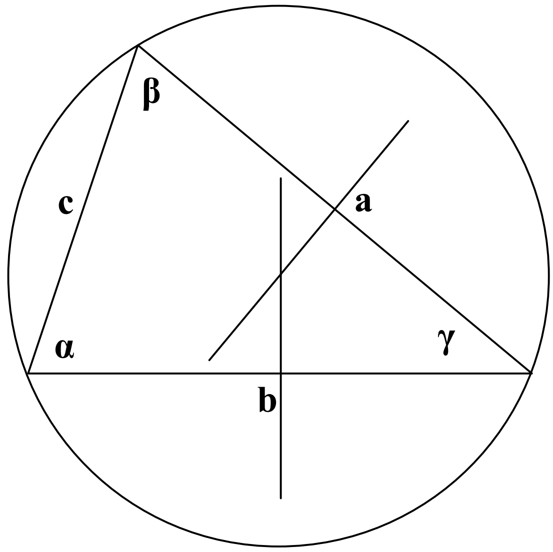
$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}=2R$$

(R = raggio della circonferenza circoscritta al triangolo)



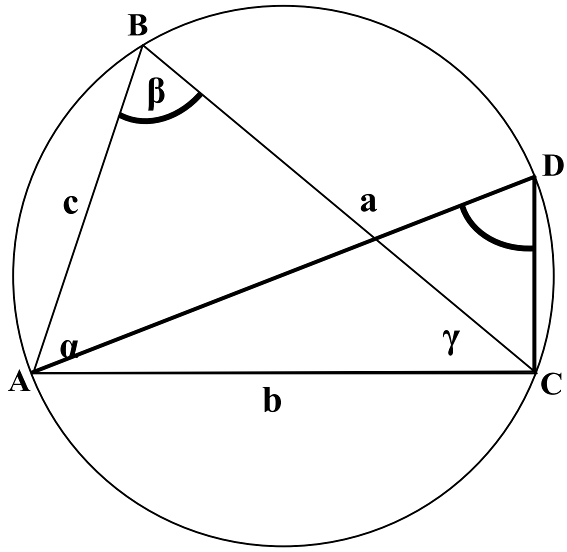
<u>*Dimostrazione 1*</u>

1. Si costruisce la circonferenza circoscritta al triangolo.
   Si trova il punto medio del lato **a** e si traccia una perpendicolare al lato **a** (asse del lato **a**);
   si trova il punto medio del lato **b** e si traccia una perpendicolare al lato **b** (asse del lato **b**);
   il punto di incontro dei due assi **O**, è il ***circocentro***, centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC;

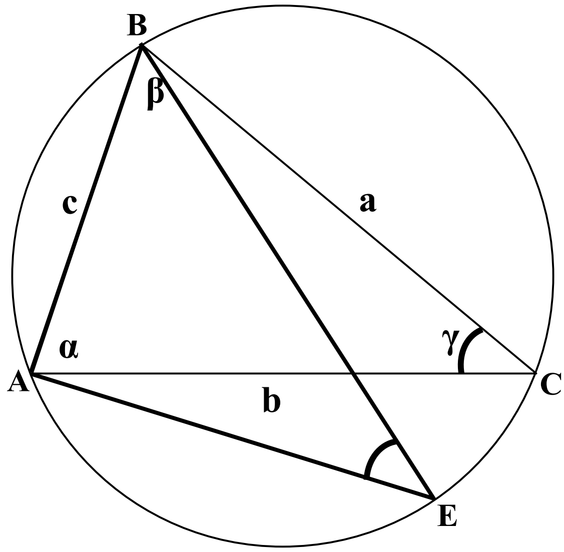


2. Si costruisce la circonferenza circoscritta al triangolo.
   Centro del compasso nel punto **O** ed apertura del compasso fino ad un vertice del triangolo si traccia la circonferenza;

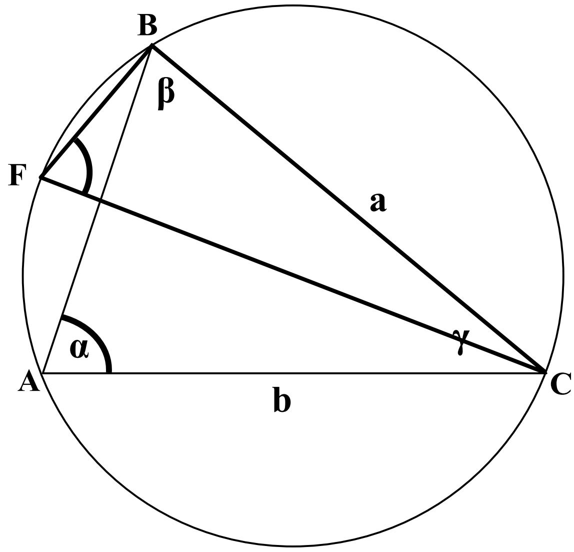
3. Si traccia il diametro **AD** della circonferenza.
   Il triangolo **ACD** è rettangolo in **C**, perché inscritto in una semicirconferenza;
   pertanto $AD=\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{D}}$
   ma l'angolo $\hat{D}=\beta$ perché sottendono lo stesso arco;
   mentre AD =2R;
   In definitiva si ha che: $2R=\dfrac{b}{\text{sen}\,\beta}$



4. Si traccia il diametro **BE** della circonferenza.
Il triangolo **ABE** è rettangolo in **A**, perché inscritto in una semicirconferenza;
pertanto $BE = \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{E}}$
ma l'angolo $\hat{E} = \gamma$ perché sottendono lo stesso arco;
mentre BE =2R;
In definitiva si ha che: $2R = \dfrac{c}{\text{sen}\,\gamma}$

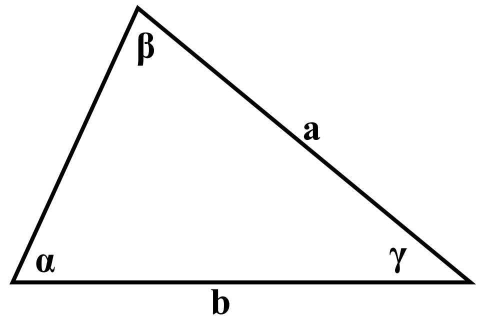


5. Si traccia il diametro **CF** della circonferenza.
Il triangolo **BCF** è rettangolo in **B**, perché inscritto in una semicirconferenza;
pertanto $CF = \dfrac{a}{\text{sen}\,\hat{F}}$
ma l'angolo $\hat{F} = \alpha$ perché sottendono lo stesso arco;
mentre CF =2R;
In definitiva si ha che: $2R = \dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha}$



6. Riunendo le tre relazioni trovate si ottiene:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

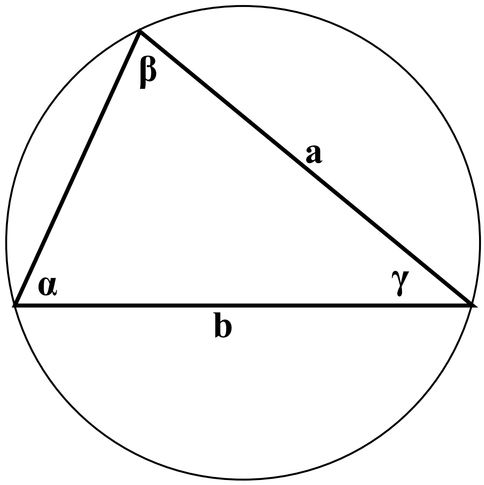


Dimostrazione 2

Si costruisce la circonferenza circoscritta al triangolo.

Per il teorema della corda si ha:

$a = 2\,r\,sen\,\alpha$	Dalle quali si ottiene:	$\dfrac{a}{sen\,\alpha} = 2\,r$
$b = 2\,r\,sen\,\beta$		$\dfrac{b}{sen\,\beta} = 2\,r$
$c = 2\,r\,sen\,\gamma$		$\dfrac{c}{sen\,\gamma} = 2\,r$



Riunendo in una unica relazione le tre uguaglianze si ha:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2r$$