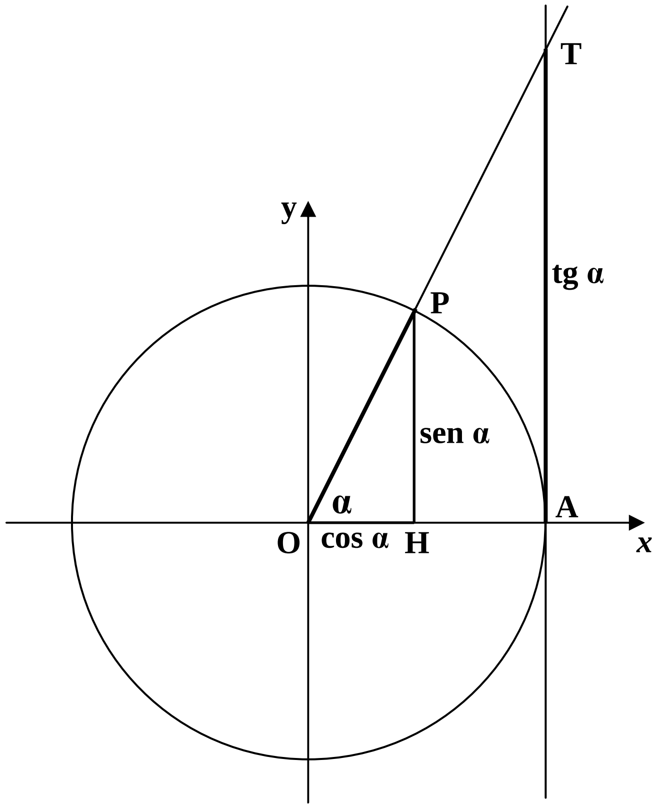
Elementi di Trigonometria



La ***circonferenza goniometrica*** è una circonferenza di centro l'origine degli assi cartesiani e raggio unitario.

Il ***seno*** dell'angolo orientato α è l'ordinata del secondo estremo dell'angolo α.

Il ***coseno*** dell'angolo orientato α è l'ascissa del secondo estremo dell'angolo α.

La ***tangente*** dell'angolo orientato α è il segmento avente per estremi l'origine degli archi A, e il punto d'incontro fra la tangente geometrica nell'origine degli archi e il prolungamento del raggio per il secondo estremo dell'arco AP.

$P\,(\cos\alpha\,;\,\text{sen}\,\alpha)$ $\qquad PH = \text{sen}\,\alpha$

$OH = \cos\alpha$ $\qquad AT = \text{tg}\,\alpha$

Le funzioni seno e coseno sono periodiche con periodo uguale a 360°.

$$\text{sen}\,(k\cdot 360+\alpha)=\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\,(k\cdot 360+\alpha)=\cos\,\alpha$$

Le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo 180°.

$\text{tg}\,(k\cdot 180+\alpha)=\text{tg}\,\alpha$ $\qquad \text{cotg}\,(k\cdot 180+\alpha)=\text{Cotg}\,\alpha$

Relazioni fondamentali

$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\text{sen}^2\alpha=1-\cos^2\alpha$	$\text{sen}\,\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
	$\cos^2\alpha=1-\text{sen}^2\alpha$	$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$

$\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$	$\text{cotg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

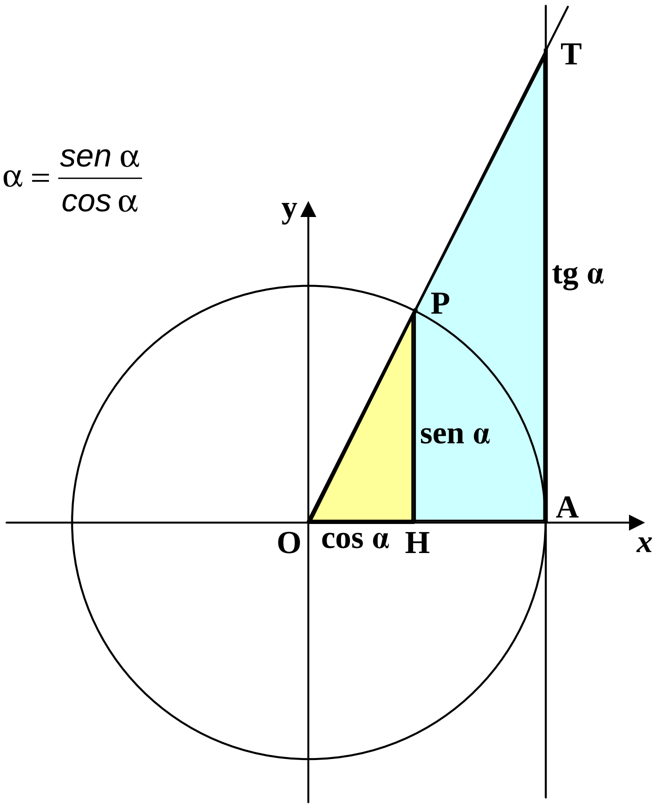
Funzione nota	sen α	cos α	tg α	cotg α
sen α	–	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$
cos α	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	–	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\text{cotg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$
tg α	$\pm\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	–	$\dfrac{1}{\text{cotg}\,\alpha}$
cotg α	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\,\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$	–

La ***prima relazione fondamentale*** dice che: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Dimostrazione

La dimostrazione scaturisce dall'applicazione del Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPH.

La ***seconda relazione fondamentale*** dice che: $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$



Dimostrazione

I triangoli OHP e OAT sono simili, infatti:
- l'angolo α è in comune ai due triangoli,
- l'angolo $O\hat{H}P = O\hat{A}T = 90°$

Pertanto i lati corrispondenti dei due triangoli sono proporzionali:

OH : OA = PH : AT e cioè

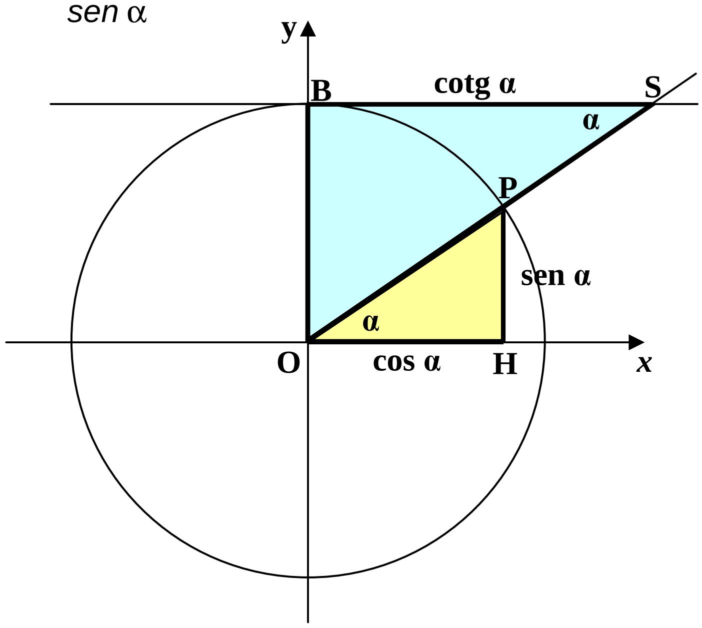
$cos\,\alpha : 1 = sen\,\alpha : tg\,\alpha$

per la proprietà fondamentale delle proporzioni

si ha : $cos\,\alpha \cdot tg\,\alpha = 1 \cdot sen\,\alpha$

dividendo per cos α si ha: $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$.

La ***terza relazione fondamentale*** dice che: $cotg\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$



Dimostrazione

I triangoli OHP e OBS sono simili, infatti:
- l'angolo α = $B\hat{S}O$ perché alterni interni,
- l'angolo $O\hat{H}P = O\hat{B}S = 90°$

Pertanto i lati corrispondenti dei due triangoli sono proporzionali:

BS : OH = OB : PH e cioè

$cotg\,\alpha : cos\,\alpha : 1 = sen\,\alpha$

per la proprietà fondamentale delle proporzioni

si ha : $sen\,\alpha \cdot cot\,g\,\alpha = 1 \cdot cos\,\alpha$

dividendo per sen α si ha: $cotg\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$

Altre relazioni

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{1}{1+\operatorname{Cotg}^2\alpha}$$

Pertanto $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{Cotg}^2\alpha}}$ e $\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Cotg}^2\alpha}}}$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Pertanto $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ e $\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}}$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{1} = \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Pertanto $\boxed{\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ e $\boxed{\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}}$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{1} = \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{Cotg}^2\alpha}{1+\operatorname{Cotg}^2\alpha}$$

Pertanto $\boxed{\cos^2\alpha = \dfrac{\operatorname{Cotg}^2\alpha}{1+\operatorname{Cotg}^2\alpha}}$ e $\boxed{\cos\alpha = \pm\dfrac{\operatorname{Cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{Cotg}^2\alpha}}}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}}$$

$$\operatorname{Cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\operatorname{Cotg}\alpha = \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}}$$

$$\operatorname{Cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\operatorname{Cotg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{Cotg}\alpha} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Cotg}\alpha}} \quad \text{e} \quad \boxed{\operatorname{Cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$$