

Elementi di calcolo delle probabilità

La probabilità che un evento A si verifichi è data da:

$$p(A) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

L'insuccesso è dato da: $q = 1 - p$.

Inoltre: $p + q = 1$ $0 \leq p \leq 1$ $0 \leq q \leq 1$

Un evento si dice *certo* quando $p = 1$

Un evento si dice *impossibile* quando $p = 0$

Esempio

Calcolare la probabilità che lanciando un dado esca un numero pari.

Soluzione

$$p(\text{pari}) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Probabilità condizionata

Dati due eventi A e B, si dice probabilità condizionata di B rispetto ad A, la probabilità che si verifichi l'evento B supposto che si sia già verificato l'evento A.

$$p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Esempio

Data un'urna che contiene palline tutte uguali numerate da 1 a 10, vogliamo valutare la probabilità che, estraendone una, si verifichi l'evento B: "esce un numero minore di 7", supposto che si sia già verificato l'evento A: "esce un numero maggiore di 3".

Soluzione

Supponiamo di estrarre una pallina e che questa rappresenti un numero maggiore di 3; si tratta di valutare $p(B / A)$;

$$\text{si ha che: } p(A \cap B) = \frac{3}{10} \quad p(A) = \frac{7}{10} \quad \text{quindi: } p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{3}{7}.$$

$$\text{Mentre: } p(B) = \frac{6}{10} \quad \text{si ha che: } p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{2}.$$

Si osserva che: $p(B) \neq p(B / A)$ e che $p(A) \neq p(A / B)$.

Ciò vuol dire che il fatto di non sapere che si è verificato A (o B), modifica il valore di probabilità di B (o di A).

Se $p(B) \neq p(B / A)$ e $p(A) \neq p(A / B)$ Gli eventi A e B si dicono *dipendenti*.

Se $p(B) = p(B / A)$ e $p(A) = p(A / B)$ Gli eventi A e B si dicono *indipendenti*.

Esempio

Si estrae una carta da un mazzo di 40 e si vuole valutare la probabilità dell'evento B: “esce una donna”, supposto di sapere che si è già verificato l'evento A: “esce una carta di colore nero”. Si ha che:

$$\text{si ha che: } p(A \cap B) = \frac{1}{20} \quad p(A) = \frac{1}{2} \quad p(B) = \frac{1}{10}$$

$$\text{quindi: } p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{2}.$$

Si osserva che: $p(B) = p(B / A)$ e che $p(A) = p(A / B)$. Ciò vuol dire che il fatto di sapere che si è verificato A (o B), non modifica il valore di probabilità di B (o di A). In questo caso gli eventi si dicono *indipendenti*.

$$\text{Pertanto dalle relazioni: } p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{e} \quad p(B) = p(B / A) \quad \text{si ha: } p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{cioè:}$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \quad \text{valida per eventi indipendenti.}$$

Il teorema seguente riassume quanto fin qui analizzato:

Probabilità composta

Due eventi si dicono *indipendenti* quando il verificarsi dell'uno non influisce sul presentarsi dell'altro.

Due eventi si dicono *dipendenti* quando il verificarsi dell'uno influisce sul presentarsi dell'altro.

$$p(A \cap B) = \begin{cases} p(A) \cdot p(B) & \text{se A e B sono indipendenti} \\ p(A) \cdot p(B / A) & \text{se A e B sono dipendenti} \end{cases}$$

Osservazione

L'estrazione di due palline da una scatola, senza la reintroduzione della prima pallina estratta nella scatola, è un tipico esempio di eventi dipendenti.

L'estrazione di due palline da una scatola, con la reintroduzione della prima pallina estratta nella scatola, è un tipico esempio di eventi indipendenti.

Esempio

Un'urna contiene 10 palline di cui 6 rosse e 4 bianche. Si estraggono, successivamente l'una all'altra, 2 palline. Calcolare la probabilità che entrambe le palline sono rosse nell'ipotesi che ci sia o non ci sia reintroduzione.

Soluzione

Con reinbussolamento

$$p(1 \text{ Rossa} \cap 2 \text{ Rossa}) = p(1 \text{ Rossa}) \cdot p(2 \text{ Rossa}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}.$$

Senza reinbussolamento

$$p(1 \text{ Rossa} \cap 2 \text{ Rossa}) = p(1 \text{ Rossa}) \cdot p(2 \text{ Rossa} / 1 \text{ Rossa}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

Probabilità totale

Due eventi si dicono *incompatibili* quando il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.

Due eventi si dicono *compatibili* quando il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro.

$$p(A \cup B) = \begin{cases} p(A) + p(B) & \text{se } A \text{ e } B \text{ sono incompatibili} \\ p(A) + p(B) - p(A \cap B) & \text{se } A \text{ e } B \text{ sono compatibili} \end{cases}$$

Esempio

Calcolare la probabilità che venga estratto un asso o una carta di coppe da un mazzo di 40 carte napoletane.

Soluzione

I due eventi: “esce l'asso” e “esce una carta di coppe” sono compatibili. Infatti se esce un asso, ciò non esclude che tale asso sia di coppe.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(\text{Asso}) + p(\text{Coppe}) - p(\text{Asso di coppe}) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}.$$

Esempio

Calcolare la probabilità che lanciando un dado esca il 3 oppure il 4.

Soluzione

I due eventi: “esce il 3” e “esce il 4” sono incompatibili. Infatti se esce il 3, ciò esclude l'uscita del 4.

$$p(3 \cup 4) = p(3) + p(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Teorema di Bayes

Quando si affronta l'analisi di un fenomeno aleatorio in cui si verifica un certo evento particolare, ci si chiede spesso quale sia la causa che, in termini probabilistici, lo ha provocato.

Per esempio, se si verifica un aumento del numero di individui in una determinata specie animale, ci si può chiedere quale ne sia la causa più probabile: la mancanza di nemici naturali, l'aumento di disponibilità di cibo e di acqua, condizioni climatiche migliori.

Se nell'analisi di una produzione aziendale si verifica una diminuzione delle vendite di un certo prodotto (per esempio di un dentifricio), ci si chiede quale ne sia la causa più probabile: un aumento del prezzo, un cambiamento di gusto, un cambiamento della confezione.

In casi come questi si tratta, in sostanza, di calcolare una probabilità condizionata: con riferimento al secondo esempio, supposto che si sia verificata una diminuzione delle vendite di dentifricio (evento B) ci chiediamo:

qual è la probabilità che a causarla sia stato un aumento di prezzo (evento A_1): $p(A_1 / B)$

qual è la probabilità che a causarla sia stato un cambiamento del gusto (evento A_2): $p(A_2 / B)$

qual è la probabilità che a causarla sia stato un cambiamento della confezione (evento A_3): $p(A_3 / B)$.

Per calcolare questo tipo di probabilità condizionate ci viene in aiuto un teorema formulato dal matematico inglese Thomas Bayes (1702-1761):

Dato uno spazio campionario Ω e considerata una sua partizione in n sottoinsiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, che chiameremo cause, indicato con B un evento non impossibile, che chiameremo effetto, allora la probabilità che l'evento B sia stato prodotto dalla causa A_i è:

$$p(A_i / B) = \frac{p(B / A_i) \cdot p(A_i)}{p(B / A_1) \cdot p(A_1) + p(B / A_2) \cdot p(A_2) + \dots + p(B / A_n) \cdot p(A_n)}$$

Esempio

Un'urna contiene 20 palline rosse, 30 palline bianche e 40 palline nere; una seconda urna contiene invece 10 palline rosse, 15 bianche e 35 nere ed infine una terza urna contiene 18 palline rosse, 12 bianche e 20 nere.

Estraiamo una pallina e chiediamoci, nel caso in cui questa risulti nera, quale sia la probabilità che essa provenga dalla prima urna.

Osserviamo subito che se la pallina estratta fosse rossa o bianca il problema non ci interesserebbe più.

Occorre supporre quindi che si sia verificato l'evento B: «la pallina estratta è nera».

B è quindi l'effetto prodotto dall'esperimento aleatorio di estrazione di una pallina da un'urna a scelta fra 3.

Lo spazio Ω è l'insieme { urna n.1, urna n.2, urna n.3 }.

Gli eventi A_i sono nel nostro caso i seguenti:

A_1 : «la pallina proviene dalla prima urna»

A_2 : «la pallina proviene dalla seconda urna»

A_3 : «la pallina proviene dalla terza urna»

Esse rappresentano le cause che hanno prodotto l'evento B.

Il teorema di Bayes ci consente di calcolare la probabilità che B sia stato causato da A_1 .

$$p(A_1/B) = \frac{p(B/A_1) \cdot p(A_1)}{p(B/A_1) \cdot p(A_1) + p(B/A_2) \cdot p(A_2) + p(B/A_3) \cdot p(A_3)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}} = 0,31128.$$