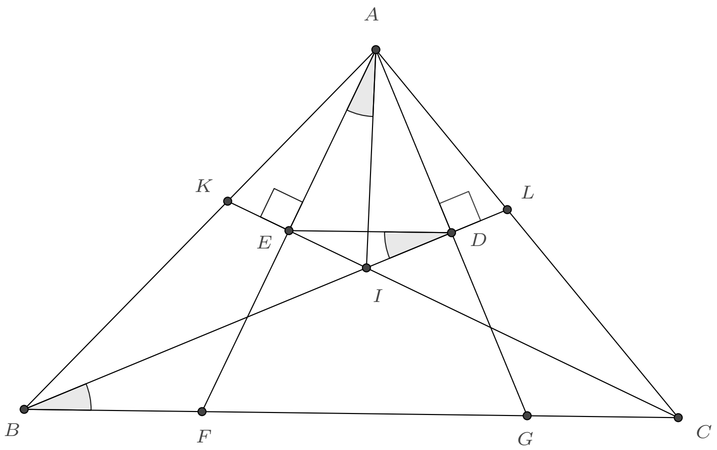
1. Sia ABC un triangolo, e siano D ed E le proiezioni di A sulle bisettrici uscenti da B e C. Dimostrare che DE è parallelo a BC.



Soluzione: Siano F e G i punti d'intersezione fra la retta BC e le rette AE e AD rispettivamente. Il segmento CE è bisettrice e altezza relativa al lato AF del triangolo ACF, dunque è anche mediana (e il triangolo ACF è isoscele sulla base AF): abbiamo $AE = EF$. Similmente, BD è bisettrice e altezza (dunque mediana) nel triangolo ABG, e $AD = DG$. Applicando il teorema di Talete nel triangolo AFG si ottiene il parallelismo fra le rette DE e BC.

Seconda soluzione: Sia I l'incentro del triangolo ABC, siano BL e CK le bisettrici uscenti da B e da C, e siano α, β, γ gli angoli interni in A, B, C rispettivamente. Poiché gli angoli $\widehat{AEI}$ e $\widehat{ADI}$ sono retti, il quadrilatero $AEID$ è inscrittibile in una circonferenza: abbiamo dunque $\widehat{IAE} = \widehat{IDE}$. D'altra parte, $\widehat{AKC} = 180° - \frac{\gamma}{2} - \alpha$, e (supponendo che E sia interno al segmento IK per fissare la configurazione: il caso in cui ciò non avvenga è analogo) $\widehat{KAE} = 90° - \widehat{AKC} = \frac{\gamma}{2} + \alpha - 90°$. Gli angoli $\widehat{IAE}$ e $\widehat{IDE}$ valgono perciò $\frac{\alpha}{2} - \widehat{KAE} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} - \alpha + 90° = \frac{180° - \gamma - \alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \widehat{LBC}$. I due angoli alterni interni $\widehat{EDB}$ e $\widehat{DBC}$ formati dalla trasversale DB con le rette ED e BC sono in conclusione congruenti, e quindi le rette ED e BC sono parallele.

Terza soluzione: Sia D' la proiezione di D su BC, e sia H il piede dell'altezza da A. Allora

$$DD' = BD \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = AB \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = AB \sin \beta/2 = AH/2.$$

Similmente per E, quindi D ed E giacciono sulla parallela a BC situata a distanza $AH/2$ dalla parte di A.

2. In una gara di matematica si propongono 3 problemi, ciascuno dei quali viene valutato con un punteggio intero compreso fra 0 e 7 (estremi inclusi). Si sa che, comunque si scelgano due concorrenti, c'è al più un problema su cui questi hanno ottenuto lo stesso punteggio (per esempio, non ci sono due concorrenti i cui punteggi sui tre problemi siano 7, 1, 2 per il primo e 7, 5, 2 per il secondo, ma ci potrebbero essere due concorrenti i cui punteggi siano 7, 1, 2 e 7, 2, 1). Quanti sono al massimo i partecipanti alla gara?

Soluzione: La risposta è 64. Indichiamo con p_1, p_2, p_3 i punteggi che un concorrente può ottenere nei problemi 1,2,3, rispettivamente. In primo luogo osserviamo che sicuramente il numero di concorrenti non può essere superiore a 64. Infatti, considerando anche solo i primi due problemi, le coppie di punteggi (p_1, p_2) possibili relative a questi due problemi sono $8^2 = 64$, e quindi, se si vuole che a concorrenti diversi corrispondano coppie diverse, il numero di concorrenti non può superare 64.

In secondo luogo, però, con 64 concorrenti si può ottenere il il risultato richiesto. Immaginiamo infatti che i 64 concorrenti ottengano, nei primi due problemi, tutte le 64 coppie (p_1, p_2) di punteggi disponibili. È certamente possibile, visto che i punteggi variano tra 0 e 7, che tutti i concorrenti ottengano un punteggio totale (cioè la somma dei punteggi $p_1 + p_2 + p_3$) divisibile per 8. In questo caso non ci sono due concorrenti che hanno punteggio uguale in due problemi diversi. Infatti, se due concorrenti hanno per esempio punteggi uguali per esempio nel problema 1 e nel problema 3, allora, per differenza, devono avere un punteggio uguale anche nel problema 2, contraddicendo l'ipotesi fatta. Un discorso completamente analogo si applica al caso in cui due concorrenti abbiano punteggio uguale nel problema 2 e nel problema 3.

Seconda soluzione: La prima parte di questa soluzione coincide con quella della soluzione precedente. Per la seconda parte, faciamo vedere che 64 concorrenti possono soddisfare la condizione richiesta. Già sappiamo che, sui primi due problemi, i nostri 64 concorrenti devono ottenere tutte le 64 possibili combinazioni di punteggi. Possiamo quindi costruire una tabella 8×8 le cui righe corrispondono ai punteggi del primo problema, e le cui colonne corrispondono ai punteggi del secondo. Ad ogni casella della tabella corrisponderà uno dei concorrenti, ed in quella casella vogliamo scrivere il punteggio che egli ottiene nel terzo problema. La richiesta dell'esercizio diventa allora che nessuna riga e nessuna colonna contengano due numeri uguali. La tabella seguente, per esempio, soddisfa questa richiesta.

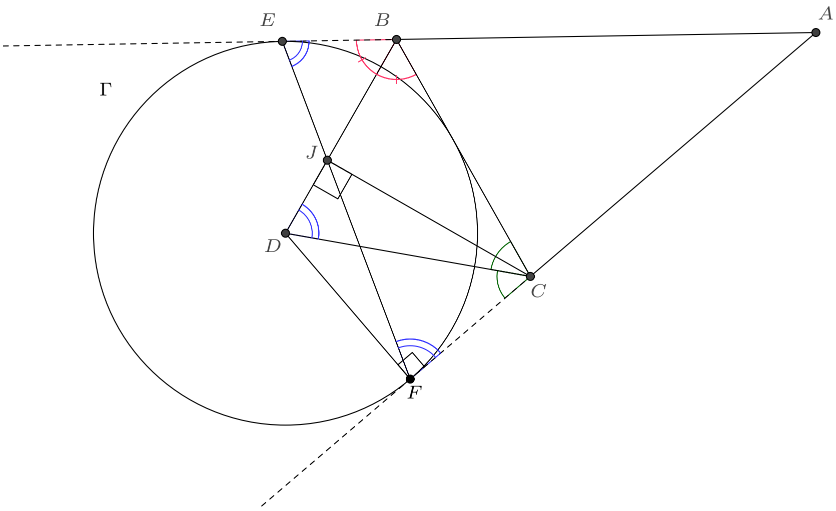
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

3. Sia Γ la circonferenza ex-inscritta al triangolo ABC opposta al vertice A, ossia la circonferenza tangente a BC e ai prolungamenti dei lati AB e AC dalla parte di B e di C. Sia D il centro di Γ e siano E ed F, rispettivamente, i punti di tangenza di Γ con i prolungamenti dei lati AB ed AC. Sia J l'intersezione tra i segmenti BD ed EF.

Dimostrare che l'angolo $\angle CJB$ è retto.

Soluzione: Le rette BD e CD sono bisettrici degli angoli $\widehat{EBC}$ e $\widehat{BCF}$; detti α, β, γ gli angoli interni del triangolo ABC (rispettivamente in A, B, C), sappiamo perciò che $\widehat{BCD} = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$ e $\widehat{CBD} = \frac{180^\circ - \beta}{2}$. Ne consegue (per differenza) che $\widehat{BDC} = \frac{\beta + \gamma}{2}$.

Il triangolo AEF è isoscele di base EF, dunque $\widehat{AEF} = \widehat{EFA} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} = \widehat{BDC}$, e quindi il quadrilatero $DJCF$ è inscrittibile in una circonferenza. D'altra parte, poiché l'angolo $\widehat{DFA}$ è retto (dato che AF è tangente alla circonferenza Γ) ciò implica che l'angolo $\widehat{CJD}$, supplementare di $\widehat{DFC}$, sia anch'esso retto. Questo implica ovviamente anche che l'angolo $\widehat{CJB}$ è retto.



4. Determinare tutte le coppie di numeri interi positivi (a, n) con $a \geq n \geq 2$ per cui il numero $(a+1)^n + a - 1$ è una potenza di 2.

Soluzione: Se sviluppiamo $(a+1)^n + a - 1$ usando il binomio di Newton, otteniamo:

$$a^n + \cdots + \tfrac{n(n-1)}{2}a^2 + na + 1 + a - 1 = a^n + \cdots + \tfrac{n(n-1)}{2}a^2 + (n+1)a. \qquad (\star)$$

Quindi, siccome tutti i termini sono divisibili per a, e siccome $(a+1)^n + a - 1$ è una potenza di 2, anche a è una potenza di 2. Chiamiamo $a = 2^b$ e $(a+1)^n + a - 1 = 2^c$. Dalla condizione $a \geq 2$ ricaviamo che $b \geq 1$. Inoltre, dalla condizione $n \geq 2$ ricaviamo anche che $2^c > a^2 = 2^{2b}$, e quindi $c > 2b$.

Osserviamo che tutti i termini in $(\star)$, eccetto al più l'ultimo, sono divisibili per $a^2 = 2^{2b}$.

Dato che $c > 2b$, 2^c è divisibile per 2^{2b}, e quindi, per differenza, anche $(n+1)a$ lo è. Dato che $a = 2^b$, ne segue che 2^b divide $n+1$, ovvero che $n+1 = 2^b \cdot m = am$ per qualche m intero positivo. Dalla condizione $a \geq n \geq 2$, l'unico valore possibile per m è $m = 1$, e quindi $n = a - 1 = 2^b - 1$. In particolare, b non può assumere il valore 1, altrimenti $n = 1$, e quindi $b > 1$, da cui $a \geq 4$ e $n = a - 1 \geq 3$. Dall'ultima disuguaglianza segue che $2^c > a^3$, e quindi $c > 3b$.

Riscriviamo $(a+1)^n + a - 1$ usando le informazioni raccolte:

$$\begin{aligned}(a+1)^n + a - 1 &= a^n + \cdots + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3 + \tfrac{n(n-1)}{2}a^2 + (n+1)a = \\ &= 2^{nb} + \cdots + \tfrac{(2^b-1)(2^b-2)(2^b-3)}{6}2^{3b} + \tfrac{(2^b-1)(2^b-2)}{2}2^{2b} + 2^{2b}.\end{aligned}$$

Tutti i termini, eccetto al più gli ultimi due, sono divisibili per 2^{3b}; inoltre anche 2^c è divisibile per 2^{3b}, e quindi anche $\frac{(2^b-1)(2^b-2)}{2}2^{2b} + 2^{2b} = (2^b-1)(2^{b-1}-1)2^{2b} + 2^{2b}$ lo è.

Ne segue che $(2^b-1)(2^{b-1}-1) + 1 = 2^{2b-1} - 2^b - 2^{b-1} + 2$ è divisibile per 2^b, ma questo è possibile solo quando $b = 2$: se $b > 2$, infatti, tutti i termini dell'espressione eccetto l'ultimo sono divisibili per 4, e quindi la somma non risulta divisible per 4 (e quindi neppure per 2^b).

L'unico caso rimasto è $b = 2$, da cui $a = 4$ e $n = 3$, In questo caso, una verifica elementare mostra che $(a+1)^n + a - 1 = 128 = 2^7$, quindi questa è una soluzione.

In definitiva, c'è un'unica soluzione: $a = 4$, $n = 3$.

5. Sia $x_0, x_1, x_2, \ldots$ una successione di numeri razionali definita per ricorrenza nella maniera seguente: x_0 è un numero razionale qualunque, e, per $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = \begin{cases} \left|\frac{x_n}{2} - 1\right| & \text{se il numeratore di } x_n \text{ è pari}, \\ \left|\frac{1}{x_n} - 1\right| & \text{se il numeratore di } x_n \text{ è dispari}, \end{cases}$$

dove per numeratore di un numero razionale si intende quello della frazione ridotta ai minimi termini. Dimostrare che per ogni valore di x_0:

(a) la successione contiene solo un numero finito di termini distinti tra loro;

(b) la successione contiene esattamente uno tra i numeri 0 e $2/3$ (ovvero: o esiste un indice k tale che $x_k = 0$, oppure esiste un indice m tale che $x_m = 2/3$, ma non esistono entrambi).

Soluzione: (a) Scriviamo ogni termine della successione come frazione ridotta ai minimi termini, $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, e consideriamo una nuova successione $y_n = \max\{p_n, q_n\}$. Vogliamo dimostrare che la successione y_n è debolmente decrescente, ossia che $y_{n+1} \leq y_n$ per ogni $n \geq 0$. Questo implica il punto (a), in quanto ne deriva che $p_n, q_n \leq y_n \leq y_0$, e c'è solo una quantità finita di termini distinti che appartengono alla successione x_n, perché c'è solo un numero finito di numeri razionali con numeratore e denominatore limitati da y_0. Per dimostrare la disuguaglianza $y_{n+1} \leq y_n$ distinguiamo due casi:

- se p_n è pari, allora $x_{n+1} = \frac{|p_n/2 - q_n|}{q_n}$; osserviamo che quest'ultima frazione è ridotta ai minimi termini, perché $\mathrm{MCD}(p_n/2 - q_n, q_n) = \mathrm{MCD}(p_n/2, q_n) = 1$, dal momento che p_n/q_n è ridotta ai minimi termini. Notiamo inoltre che se a, b sono due numeri positivi si ha $|a - b| \leq \max\{a, b\}$. Ne segue $y_{n+1} = \max\{|p_n/2 - q_n|, q_n\} \leq \max\{p_n/2, q_n\} \leq \max\{p_n, q_n\} = y_n$.
- se p_n è dispari, $x_{n+1} = \frac{|q_n - p_n|}{p_n}$. Come prima la frazione è ridotta ai minimi termini, e abbiamo $y_{n+1} = \max\{|q_n - p_n|, p_n\} \leq \max\{p_n, q_n\} = y_n$.

(b) Osserviamo che, siccome la successione x_n contiene solo un numero finito di termini distinti, ad un certo punto uno di essi si ripeterà, e la successione sarà periodica da quel punto in poi.

Dimostriamo intanto che i valori 0 e $2/3$ non possono esistere entrambi. Se il valore 0 compare per primo, per esempio $x_k = 0$, allora $x_{k+1} = 1$, $x_{k+2} = 0$, e così via, per cui il valore $2/3$ non può comparire. Similmente, se il valore $2/3$ compare per primo, per esempio $x_m = 2/3$, allora $x_{m+1} = 2/3$, $x_{m+2} = 2/3$, e così via, per cui il valore 0 non può comparire.

Dimostriamo ora che almeno uno dei due termini 0 e $2/3$ deve comparire. A questo scopo supponiamo che 0 non compaia, e facciamo vedere che allora deve comparire $2/3$. Osseviamo innanzitutto che, se non compare 0, allora non compare neanche 1 (se $x_n = 1$ allora $x_{n+1} = 0$).

Trattandosi di numeri interi positivi, la disuguaglianza $y_{n+1} \leq y_n$ può essere una disuguaglianza stretta solo per un numero finito di casi, in quanto infiniti casi di disuguaglianza stretta farebbero scendere il valore di y_n sotto lo zero. Esaminando i vari casi, abbiamo

(1) $p_n > q_n$ e p_n pari: allora $y_n = p_n$ mentre $y_{n+1} = \max\{|p_n/2 - q_n|, q_n\} < p_n = y_n$;

(2) $p_n < q_n$ e p_n dispari: allora $y_n = q_n$ mentre $y_{n+1} = \max\{q_n - p_n, p_n\} < q_n = y_n$;

(3) $p_n > q_n$ e p_n dispari;

(4) $p_n < q_n$ e p_n pari.

I casi (1) e (2) possono presentarsi solo un numero finito di volte, perché presentano una disuguaglianza stretta. Dunque, da un certo punto in poi, possono presentarsi solo i casi (3) e (4). A patto di considerare n sufficientemente grande, possiamo quindi limitarci ai casi (3) e (4).

Supponiamo di essere nel caso (3). Allora $x_{n+1} = \frac{|q_n - p_n|}{p_n} = \frac{p_n - q_n}{p_n} < 1$, quindi non possiamo essere di nuovo nel caso (3), e quindi x_{n+1} rientra nel caso (4).

Supponiamo ora di essere nel caso (4). Allora, $x_{n+1} = \frac{|p_n/2 - q_n|}{q_n} = \frac{q_n - p_n/2}{q_n} < 1$, quindi x_{n+1} rientra di nuovo nel caso (4).

In conclusione, da un certo punto in poi siamo sempre nel caso (4) e, come osservato precedentemente, la sucessione è periodica. Sia n_0 un intero tale che, per ogni $n \geq n_0$, si rientra nel caso (4) e la successione è periodica. In particolare, esiste un indice $k > 0$ tale che $x_{n_0+k} = x_{n_0}$. Dall'equazione $x_{n+1} = \frac{|p_n/2 - q_n|}{q_n} = \frac{q_n - p_n/2}{q_n}$ è facile dimostrare, per esempio per induzione, che $p_{n_0+k} = \dfrac{2^k - (-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1}} q_{n_0} + \dfrac{(-1)^k}{2^k} p_{n_0}$. Sapendo infine che $p_{n_o+k} = p_{n_0}$, otteniamo l'equazione

$$\frac{2^k - (-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1}} q_{n_0} + \frac{(-1)^k p_{n_0}}{2^k} = p_{n_0} \Rightarrow \frac{2^k - (-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1}} q_{n_0} = p_{n_0} \left(\frac{2^k - (-1)^k}{2^k} \right) \Rightarrow \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} = \frac{2}{3} \,,$$

come voluto.

6. Una macchina misteriosa contiene una combinazione segreta costituita da 2016 numeri interi $x_1, \ldots, x_{2016}$. Sappiamo che tutti i numeri della combinazione sono uguali salvo uno. È possibile interrogare la macchina sottoponendo ad essa una sequenza di 2016 numeri interi $y_1, \ldots, y_{2016}$. La macchina risponde rivelando il valore della somma

$$x_1 y_1 + \cdots + x_{2016} y_{2016}.$$

Dopo aver risposto alla prima domanda, la macchina accetta una seconda domanda, poi una terza, e così via.

Quante domande sono necessarie per determinare la combinazione :

(a) sapendo che il numero diverso è uguale a zero ?

(b) non sapendo quale sia il numero diverso ?

Soluzione: La risposta ad entrambe le richieste dell'esercizio è *due domande*. Per risolvere completamente l'esercizio basta esibire un metodo per determinare la combinazione in due domande, e mostrare che, anche sapendo che il numero diverso è zero, una domanda non è sufficiente. A scopo illustrativo, daremo anche un metodo più semplice per risolvere specificamente il punto (a).

Nel seguito, indicheremo con u e d i valori del numero uguale e del numero diverso rispettivamente, e con t l'indice del numero diverso (cioè $x_t = d$ e $x_i = u$ per $i \neq t$). Data una domanda $y_1, \ldots, y_{2016}$, osserviamo che la risposta è $(\Sigma - y_t)u + y_t d$, dove Σ denota la somma dei numeri della domanda $y_1 + \cdots + y_{2016}$.

Metodo per il punto (a).
Come prima domanda, sottoponiamo alla macchina i numeri $1, \ldots, 1$. In questo modo la macchina risponderà $2015u$, da cui possiamo ricavare il valore di u. Ora ci rimane da capire quale sia l'indice t. La seconda domanda è $1, 2, 3, \ldots, 2016$. Otteniamo la risposta $(\Sigma - t)u$, con $\Sigma = 1 + 2 + \cdots + 2016$. Osservando che u non può valere zero (perché i due numeri della combinazione sono *diversi*), è immediato ricavare t.

Una domanda non basta.
Dobbiamo mostrare che per ogni possibile domanda esistono due combinazioni diverse che danno la stessa risposta. Consideriamo una domanda $y_1, \ldots, y_{2016}$ (con somma Σ). Se due di questi numeri sono uguali fra loro, $y_i = y_j$, allora le due combinazioni che hanno numero uguale 1 e numero diverso 0 nella posizione i e j rispettivamente producono la medesima risposta. Quindi possiamo assumere che i numeri della domanda siano tutti diversi. In particolare, possiamo prendere $i \neq j$ tali che y_i e y_j siano diversi da Σ. Supponiamo che la combinazione sia $x_i = 0$ e $x_k = \Sigma - y_j$ per $k \neq i$. La risposta, allora, sarebbe $(\Sigma - y_i)(\Sigma - y_j)$. Si vede che la combinazione con i e j scambiati ($x_j = 0$ e $x_k = \Sigma - y_i$ per $k \neq j$) darebbe la stessa risposta.

Metodo per il punto (b).
La prima domanda è $1, -1, 1, -1, \ldots$, e chiamiamo R la risposta. Osserviamo che, detto $\Delta = u - d$, si ha $R = (-1)^t \Delta$. Ora scegliamo la seconda domanda $y_1, \ldots, y_{2016}$ in modo tale che :
(1) i numeri R e $\Sigma = y_1 + \cdots + y_{2016}$ siano primi fra loro (e Σ sia non nullo) ;
(2) i numeri $y_i(-1)^i$ siano a due a due non congruenti modulo Σ.
Per esempio, queste condizioni sono soddisfatte scegliendo $y_1 = 1$ e $y_i = |R|i$ per $i > 1$ (si osservi che $\Delta \neq 0$, quindi $R \neq 0$). La risposta che otteniamo, quindi, è

$$R' = (\Sigma - y_t)u + y_t d = \Sigma u - y_t \Delta = \Sigma u - y_t(-1)^t R.$$

Da questa risposta possiamo desumere la classe di $y_t(-1)^t R$ modulo Σ. Siccome R e Σ sono primi fra loro, la classe di $y_t(-1)^t$ modulo Σ è anch'essa univocamente determinata. Per costruzione, però, i numeri $y_i(-1)^i$ sono a due a due non congruenti modulo Σ, di conseguenza, conoscendo la classe di $y_t(-1)^t$, possiamo desumere t. Noto t, è immediato calcolare u dall'equazione per R' scritta sopra, quindi Δ da $R = (-1)^t \Delta$, ed infine d.