

XXIV OLIMPIADE ITALIANA DI MATEMATICA

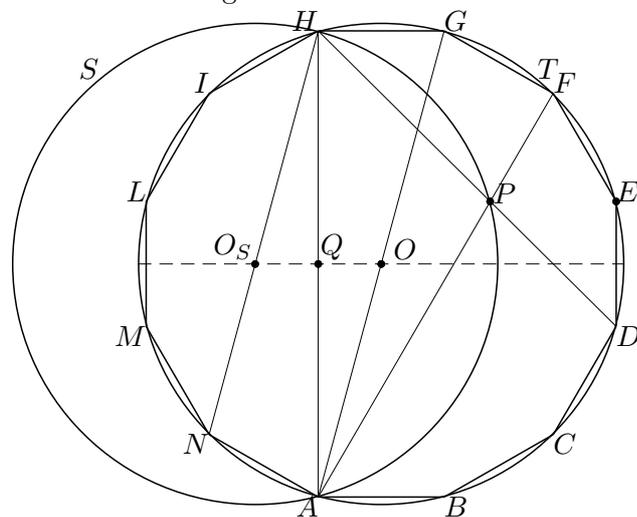
Cesenatico, 9 maggio 2008

SOLUZIONI

1. Sia $ABCDEFGHIILMN$ un dodecagono regolare. Sia P il punto di intersezione delle diagonali AF e DH . Sia S la circonferenza passante per A e H , congruente a quella circoscritta al dodecagono e distinta da essa. Dimostrare che:

- P appartiene a S ;
- il centro di S appartiene alla diagonale HN ;
- la lunghezza di PE è uguale al lato del dodecagono.

SOLUZIONE: Sia T la circonferenza circoscritta al dodecagono, e sia O il suo centro; sia O_S il centro della circonferenza S e sia Q il punto medio di AH . I punti O e O_S sono sull'asse di AH e, avendo la stessa distanza da A ed H , sono simmetrici rispetto ad AH , e anche simmetrici rispetto a Q . Poichè A e G sono vertici opposti del dodecagono, AG è un diametro di T ; ne segue che O è anche il punto medio della diagonale AG e che $\widehat{AHG} = 90^\circ$. Per la similitudine dei triangoli AQO e AHG (due triangoli rettangoli aventi un angolo acuto in comune), si ha $QO = \frac{1}{2}HG$ e quindi $O_S O = 2QO = HG$.



La circonferenza S è dunque la traslata di T per una lunghezza uguale al lato HG , nella direzione \vec{GH} .

(b): Per la regolarità del dodecagono, $HL = NL$ e $GL = AL$ e pertanto le rette HN e AG , entrambe perpendicolari al raggio LO di T , sono parallele. Ma allora HN è la traslata di AG rispetto al vettore \vec{GH} , e pertanto il centro di S si trova in HN .

(a) e (c): Per quanto osservato prima, se dimostriamo che P è il traslato di E nella direzione \vec{GH} , dimostriamo simultaneamente (a) e (c). Equivalentemente, dimostriamo che E è il traslato di P nella direzione \vec{HG} . Il traslato di P nella direzione \vec{HG} è l'intersezione delle traslate nella stessa direzione di AF e BD . Ma con lo stesso argomento usato per dimostrare (b) si prova che le traslate di AF e DH nella direzione \vec{HG} sono le diagonali BE e GE , che si intersecano in E .

2. Sia $n \geq 2$ un numero intero. Coloriamo tutte le caselle di una scacchiera $n \times n$ in rosso o blu in modo che ogni quadrato 2×2 contenuto nella scacchiera abbia esattamente due caselle rosse e due blu.

Quante sono le colorazioni possibili?

NOTA: due colorazioni che si ottengono l'una dall'altra con una rotazione o una simmetria della scacchiera sono considerate distinte.

SOLUZIONE: Fissiamo una colorazione della prima riga della scacchiera. Essa può essere fatto in 2^n modi (2 scelte per il colore di ciascuna delle n caselle). Mostriamo ora se e in quanti modi una colorazione della prima riga può essere completata ad una colorazione dell'intera scacchiera soddisfacendo le condizioni richieste. In seguito chiameremo semplicemente completamento di una colorazione un completamento che soddisfa le condizioni del problema.

Primo caso: le caselle della prima riga hanno colori alterni. Le possibilità di questo tipo di colorazione della prima riga sono 2: se la prima casella è colorata in rosso, allora la seconda è colorata in blu, la terza in rosso, e così via. Viceversa, se la prima casella è colorata in blu, allora la seconda è colorata in rosso, la terza in blu, e così via.

In questo caso i completamenti della colorazione alla seconda riga sono esattamente quelli a colori alterni, e cioè 2. Similmente, per ogni completamento della seconda riga ci sono 2 completamenti della terza riga, e così via, per un totale di 2^{n-1} completamenti e quindi di $2 \dots 2^{n-1} = 2^n$ possibilità relative a questo caso.

Secondo caso: esistono due caselle adiacenti della prima riga con lo stesso colore. Le possibilità per questo tipo di configurazione sono tutte meno quelle per il primo tipo di configurazione, cioè $2^n - 2$.

Una possibilità di completare la colorazione alla seconda riga è certamente quella di colorare ciascuna casella della seconda in modo diverso da quello della casella sopra di lei. D'altra parte, questa è l'unica possibilità, poiché sotto due caselle adiacenti dello stesso colore devono esserci due caselle di colore diverso, e quindi necessariamente alla loro sinistra e alla loro destra ci devono essere caselle di colore diverso da quelle sopra di loro, e così via. In conclusione, c'è un solo completamento della colorazione alla seconda riga. Analogamente, c'è un solo completamento della colorazione ad ogni riga successiva alla prima, per un totale di $2^n - 2$ possibilità relative a questo caso.

Il numero totale di colorazioni è dunque la somma di quelli relativi al primo e al secondo caso, e cioè

$$2^n + 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2.$$

3. Determinare tutte le funzioni f , definite sull'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi relativi e a valori nell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali, che soddisfano simultaneamente le seguenti proprietà:

- per ogni coppia di interi (m, n) con $m < n$ si ha $f(m) < f(n)$;
- per ogni coppia di interi (m, n) esiste un intero k tale che $f(m) - f(n) = f(k)$.

SOLUZIONE: È immediato verificare che le funzioni del tipo $f(n) = (n - n_0)a$ con n_0 intero e a reale positivo soddisfano le ipotesi: se $m < n$ allora $(m - n_0)a < (n - n_0)a$ e $f(m) - f(n) = (m - n_0)a - (n - n_0)a = ma - na = [(m - n + n_0) - n_0]a = f(k)$ con $k = m - n + n_0$.

Dimostriamo che queste funzioni sono le sole possibili.

Sia f una funzione che soddisfa le condizioni date. Ponendo $m = n$ nella seconda condizione otteniamo che esiste un intero n_0 tale che $0 = f(n) - f(n) = f(n_0)$.

Sia dunque n_0 un intero tale che $f(n_0) = 0$ e poniamo $a = f(n_0 + 1)$; dimostriamo per induzione che i numeri reali della forma ka con k intero sono valori della funzione f . Se $na = f(m)$ è un valore, da $f(n_0) - f(m) = -na$ si ottiene che anche $-na$ è un valore; supponiamo che na sia un valore: allora anche $-a - na = -(n + 1)a$ e $na - (-a) = (n + 1)a$ sono dei valori. Quindi f deve assumere come valori tutti i multipli interi di a .

Dimostriamo ora che *solo* i numeri di tale forma sono valori di f . Sia b un numero reale tale che b/a non è intero (si noti che $a > f(n_0) = 0$ per la prima proprietà, dunque possiamo sempre dividere per a), e supponiamo per assurdo che b sia un valore di f . Se $b > 0$, consideriamo il massimo k naturale tale che ka è minore di b ; poiché abbiamo già visto che ka viene assunto come valore da f , questo deve accadere anche per $b - ka$. Ma per la nostra scelta di k vale $ka < b < (k + 1)a$, quindi $0 < b - ka < a$, e questo è assurdo: la funzione è strettamente crescente, dunque non assume valori compresi fra $f(n_0) = 0$ e $f(n_0 + 1) = a$. Lo stesso ragionamento vale per $b < 0$: detto k il minimo numero naturale tale che $-ka < b$, il numero $b - (-ka)$, compreso fra 0 e a , dovrebbe appartenere all'immagine. Di nuovo questo è assurdo.

Abbiamo così dimostrato che le funzioni possibili sono tutte e sole quelle crescenti la cui immagine sia formata dai multipli interi di un numero reale positivo a , ovvero quelle della forma: $f(n_0) = 0$ per un certo intero n_0 ; $f(n_0 + k) = ka$ per ogni k intero, per un certo a reale positivo.

SECONDA SOLUZIONE: Come nella precedente soluzione, notiamo che tutte le funzioni del tipo $f(n) = (n - n_0)a$ con n_0 intero e a reale positivo soddisfano le condizioni date.

Sempre analogamente a prima, sia n_0 un intero per cui $f(n_0) = 0$ e sia $a = f(n_0 + 1)$ (a è positivo per la prima condizione). Dobbiamo dimostrare che necessariamente $f(n) = (n - n_0)a$ per ogni n o, equivalentemente, che $g(n) = f(n + n_0) = na$ per ogni n . È immediato verificare che la funzione g soddisfa le stesse condizioni date per f . Sia n un qualsiasi intero. Poiché la funzione g è strettamente crescente, si ha $g(n + 1) - g(n) > 0$, e quindi, poiché $g(n + 1) - g(n)$ è un valore della funzione, $g(n + 1) - g(n) \geq g(1)$; d'altra parte, $g(n + 1) - g(1) < g(n + 1)$ e quindi, poiché $g(n + 1) - g(1)$ è un valore della funzione, $g(n + 1) - g(1) \leq g(n)$. In conclusione,

$$g(n + 1) = g(n) + g(1) \quad \text{per ogni intero } n.$$

Ora dimostriamo per induzione che $g(n) = na$ per ogni intero n . Sappiamo che questo è vero per $n = 0, 1$. Supponiamo che la tesi sia vera per un certo intero positivo n : allora la formula precedente dà $g(n + 1) = na + a = (n + 1)a$. Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo $m \leq 0$: ponendo $n = m - 1$ nella formula precedente otteniamo $g(m) = g(m - 1) + g(1)$, da cui $g(m - 1) = g(m) - g(1) = ma - a = (m - 1)a$.

4. Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri interi maggiori di zero tali che

$$a^2 + 2^{b+1} = 3^c.$$

SOLUZIONE: Supponiamo che (a, b, c) sia una soluzione dell'equazione data. Osserviamo innanzitutto che 2^{b+1} è pari e che 3^c è dispari, quindi a deve essere dispari. Poniamo $a = 2k + 1$.

L'ipotesi $b \geq 1$ implica che $4|3^c - a^2 = 3^c - 4k(k + 1) - 1$, quindi $4|3^c - 1$. Osservando che $3^c - 1 = (3 - 1)(3^{c-1} + 3^{c-2} + \dots + 3 + 1)$ si ottiene che $3^c - 1$ è un multiplo di 4 solo se $m = 3^{c-1} + 3^{c-2} + \dots + 3 + 1$ è pari. Poiché m è una somma di c numeri dispari, c deve essere pari.

Possiamo dunque porre $c = 2c'$, dove c' è un intero positivo. Sottraendo a^2 da entrambi i membri, la nostra equazione diventa

$$2^{b+1} = 3^{2c'} - a^2 = (3^{c'} + a)(3^{c'} - a).$$

Quindi i due fattori a destra sono potenze di 2, ed otteniamo un sistema

$$\begin{cases} 3^{c'} + a = 2^x \\ 3^{c'} - a = 2^y \\ x + y = b + 1 \end{cases} \quad \text{Poiché } 3^c \text{ ed } a$$

sono entrambi dispari, la loro somma e la loro differenza sono pari, per cui sia x che y sono positivi. Poiché a è positivo, abbiamo inoltre $x > y$, e quindi $x \geq 2$.

Sommando le prime due equazioni del sistema e dividendo per 2 otteniamo $3^{c'} = 2^{x-1} + 2^{y-1}$. Ma $3^{c'}$ è dispari e 2^{x-1} è pari, quindi 2^{y-1} è dispari e dunque $y = 1$. Dalla terza equazione del sistema ricaviamo $x = b$ e quindi, sostituendo,

$$3^{c'} = 2^{b-1} + 1.$$

Per verifica diretta, quest'ultima equazione non ha soluzione se $b = 1$; se $b = 2$, invece, c'è la soluzione $c' = 1$, ossia $c = 2$: risostituendo nell'equazione iniziale, si trova $a = 1$ e dunque si ottiene la soluzione $(a, b, c) = (1, 2, 2)$ (si verifica che in effetti $1^2 + 2^{2+1} = 3^2$).

Supponiamo ora $b \geq 3$. Abbiamo $4|3^{c'} - 1$ e, con la stessa dimostrazione precedente, otteniamo $c' = 2c''$ ed il sistema

$$\begin{cases} 3^{c''} + 1 = 2^{x'} \\ 3^{c''} - 1 = 2^{y'} \\ x' + y' = b - 1 \end{cases}$$

Analogamente a prima, otteniamo che $y' = 1$, da cui $c'' = 1$ (ossia $c = 4$), $x' = 2$ e $b = 4$. Risostituendo nell'equazione iniziale, si trova $a = 7$, e dunque la soluzione $(a, b, c) = (7, 4, 4)$ (si verifica che in effetti $7^2 + 2^{4+1} = 3^4$).

Quindi le uniche soluzioni sono $(1, 2, 2)$ e $(7, 4, 4)$.

5. Sia ABC un triangolo con tutti gli angoli maggiori di 45° e minori di 90° .

(a) Dimostrare che si possono disporre all'interno di ABC tre quadrati con le seguenti proprietà:

- i tre quadrati hanno tutti lo stesso lato;
- i tre quadrati hanno un vertice comune K interno al triangolo;
- due quadrati qualsiasi non hanno punti in comune oltre a K ;
- ciascuno dei quadrati ha due vertici **opposti** sul perimetro di ABC e per il resto è tutto all'interno del triangolo ABC .

(b) Sia P il centro del quadrato con lato AB ed esterno ad ABC . Sia r_C la simmetrica della retta passante per C e K rispetto alla bisettrice di \widehat{ACB} uscente da C . Dimostrare che P appartiene ad r_C .

SOLUZIONE: Per dimostrare il punto (a) lavoriamo al contrario, disponendo arbitrariamente dei quadrati di lato fissato ed osservando quali sono le caratteristiche del triangolo ABC generato da tale disposizione. Per l'esattezza (con riferimento alla figura) scegliamo tre angoli

$$\begin{cases} \alpha = \widehat{A_1KA_2} \\ \beta = \widehat{B_1KB_2} \\ \gamma = \widehat{C_1KC_2} \end{cases}$$

tali da non generare sovrapposizioni, ovvero compresi tra 0 e 90° , con somma 90° . Definiamo a questo punto A come l'intersezione tra le rette B_1B_2 e C_1C_2 , K_A come il punto medio del segmento A_1A_2 ; operiamo analogamente per B e C . Il quadrilatero AK_BKK_C risulta avere due angoli retti, poiché i triangoli KB_1B_2 e KC_1C_2 sono isosceli, dunque le mediane relative al vertice K sono al contempo altezze. Analogo discorso per BK_CKK_A e CK_AKK_B , da cui le relazioni:

$$\begin{cases} \widehat{K_BKK_C} = 180^\circ - \widehat{A} \\ \widehat{K_CKK_A} = 180^\circ - \widehat{B} \\ \widehat{K_AKK_B} = 180^\circ - \widehat{C} \end{cases} \quad \text{D'altro canto le mediane di cui sopra sono anche bisettrici, per cui il sistema diviene:}$$

$$\begin{cases} \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + 90^\circ = 90^\circ - \widehat{A} \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 90^\circ = 90^\circ - \widehat{B} \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 90^\circ = 180^\circ - \widehat{C} \end{cases} \quad \text{che è come dire } \begin{cases} \alpha = 2\widehat{A} - 90^\circ \\ \beta = 2\widehat{B} - 90^\circ \\ \gamma = 2\widehat{C} - 90^\circ \end{cases} \quad \text{I vincoli su } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ si trasformano coerentemente in vincoli su } (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}): \text{ si ha che ognuno degli ultimi tre angoli dev'essere compreso tra } 45^\circ \text{ e } 90^\circ. \text{ Si noti poi che per costruzione i punti } J_A, J_B, J_C \text{ risultano interni al triangolo } ABC.$$

Preso dunque un triangolo come nell'ipotesi, sappiamo come disporre tre quadrati di lato unitario in modo da generare un triangolo simile a quello desiderato; usufruendo di un opportuno movimento rigido seguito da una dilatazione (angoli e rapporti tra lunghezze vengono preservati), la configurazione risolutiva è determinata.

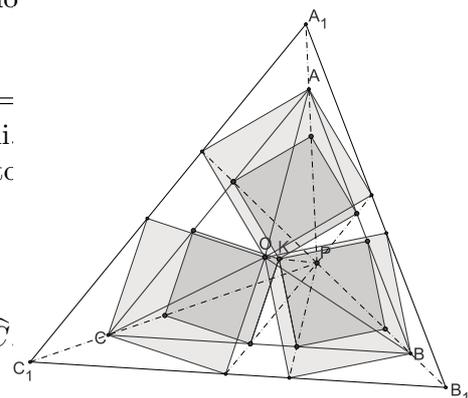
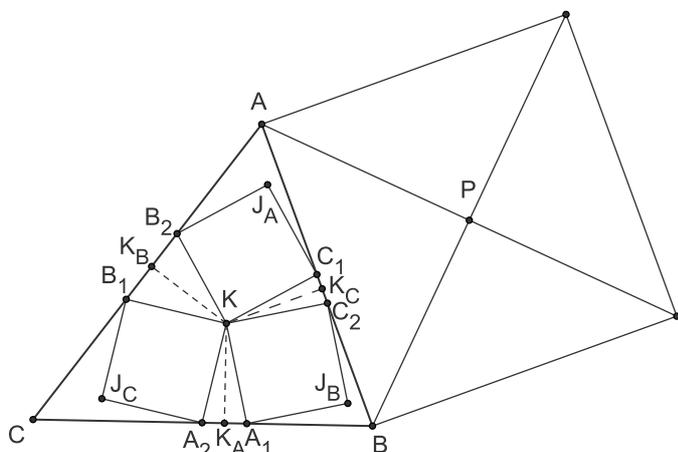
Per quanto riguarda il punto (b), sempre con riferimento alla figura, notiamo che

$$\widehat{B_1A_2B} = 45^\circ + \widehat{KA_2A_1} = 45^\circ + \frac{180^\circ - (2\widehat{A} - 90^\circ)}{2} = 180^\circ - \widehat{A}.$$

Il quadrilatero ABA_2B_1 è perciò ciclico. Ne segue che $\widehat{CB_1A_2} = 180^\circ - \widehat{AB_1A_2} = \widehat{B}$ e $\widehat{CA_2B_1} = 180^\circ - \widehat{B_1A_2B} = \widehat{A}$, dunque i triangoli A_2B_1C e ABC sono simili. D'altro canto, poiché $\widehat{KB_1A_2} = \widehat{KA_2B_1} = 45^\circ$, K è il centro del quadrato costruito su A_2B_1 esternamente a CA_2B_1 , ragion per cui

$$K\widehat{CB} = P\widehat{CA}$$

e le rette CP e CK risultano simmetriche rispetto alla bisettrice dell'angolo \widehat{C} .



6. Francesca e Giorgia fanno il seguente gioco. Su un tavolo ci sono inizialmente alcune colonne di monete. Ogni colonna contiene un certo numero di monete, che può eventualmente variare da colonna a colonna. A turno, ogni giocatrice fa una e una sola delle seguenti possibili mosse:

- sceglie una colonna contenente un numero pari non nullo $2k$ di monete e la sostituisce con due colonne contenenti k monete ciascuna;
- leva dal tavolo tutte le colonne contenenti un numero dispari di monete.

Nel caso in cui non fosse possibile effettuare una mossa del primo tipo, la giocatrice ne farà necessariamente una del secondo tipo, e viceversa.

Inizia Francesca. Vince chi prende dal tavolo l'ultima moneta.

- (a) Se inizialmente sul tavolo c'è una sola colonna, la quale contiene 2008^{2008} monete, quale giocatrice ha una strategia vincente?
- (b) Per quali configurazioni iniziali Francesca ha una strategia vincente?

SOLUZIONE: Verifichiamo innanzitutto che il gioco ha termine dopo un numero finito di mosse. Supponiamo dapprima che inizialmente ci sia una sola colonna di monete, con $2^\alpha d$ monete dove d è un numero dispari, e ragioniamo per induzione su α . Se $\alpha = 0$ il gioco si conclude dopo una sola mossa, cioè la mossa che elimina l'unica colonna dispari di d monete. Supponiamo ora di avere dimostrato che per $\alpha = k$ il gioco termina in al più N mosse. Se $\alpha = k + 1$, con la prima mossa questa colonna sarà suddivisa in due colonne con $2^k d$ monete ciascuna, e per eliminare le monete di ciascuna colonna serviranno al più N mosse. In totale, il gioco terminerà dopo al più $M = 2N + 1$ mosse. Infine, se inizialmente sul tavolo ci sono m colonne di monete C_1, \dots, C_m e per eliminare le monete di ciascuna di esse sono necessarie al più N_1, \dots, N_m mosse, il gioco terminerà dopo al più $N_1 + \dots + N_m$ mosse.

Osserviamo poi che l'ultima mossa del gioco deve eliminare tutte le monete rimaste; pertanto prima dell'ultima mossa ci saranno sul tavolo solo colonne con un numero dispari di monete, e vincerà la giocatrice che si troverà a muovere quando questo avverrà.

Supponiamo ora che sul tavolo ci siano m colonne di monete, contenenti rispettivamente n_1, \dots, n_m monete. Sia A il numero degli n_i che sono divisibili per 4, B il numero degli n_i che sono divisibili per 2 ma non per 4, e sia $\delta = 1$ se ci sono colonne con un numero dispari di monete, $\delta = 0$ altrimenti. Definiamo come valore della configurazione il numero $\delta + A + \delta AB$.

Il valore della configurazione prima dell'ultima mossa è 1 ($\delta = 1, A = 0, B = 0$) e vogliamo dimostrare che Francesca ha una strategia vincente se e solo se il valore della configurazione iniziale è un numero dispari.

Dimostriamo infatti che:

- (a) se prima di muovere una giocatrice si trova di fronte ad una configurazione di valore dispari, allora potrà sempre lasciare l'avversaria di fronte ad una combinazione di valore pari;
- (b) se prima di muovere una giocatrice si trova di fronte ad una combinazione di valore pari, allora lascerà necessariamente all'avversaria una configurazione di valore dispari.

Supponendo di aver dimostrato (a) e (b), è chiaro che, se la configurazione iniziale ha un valore dispari, la strategia vincente di Francesca sarà quella di lasciare all'avversaria sempre una configurazione di valore pari, mentre se la configurazione iniziale ha valore pari, allora Francesca lascerà a Giorgia dopo la prima mossa una configurazione con valore dispari, e sarà Giorgia ad avere la strategia vincente.

Dimostrazione di (a):

- se $\delta = 0$, allora A è dispari. La giocatrice suddivide una colonna con un numero di monete $4k$ in due colonne con $2k$ monete ciascuna. Allora δ rimane uguale a zero, mentre il numero A diventa pari (se k è pari B aumenta di 1, se k è dispari diminuisce di 1);
- se $\delta = 1$ e A è pari, la giocatrice rimuove le colonne con un numero dispari di monete (varia solo la parità di δ);
- se $\delta = 1$ e A è dispari, allora necessariamente B è dispari. In questo caso la giocatrice suddivide una colonna con $2d$ monete (d dispari) in due colonne con d monete (varia solo la parità di B).

Dimostrazione di (b):

- se $\delta = 0$, allora A è pari. Suddividendo in due una colonna con $4k$ monete cambia solo la parità di A , mentre suddividendo in due una colonna con $2d$ monete (d dispari) cambia solo la parità di δ ;
- se $\delta = 1$, allora A è dispari e B è pari. Se la giocatrice rimuove le colonne con un numero dispari di monete, cambia solo la parità di δ ; se suddivide una colonna con $4k$ monete in due colonne con $2k$ monete, cambia solo la parità di A ; se suddivide una colonna con $2d$ monete (d dispari) in due colonne con d monete, cambia solo la parità di B .

Il caso in cui c'è una sola colonna con 2008^{2008} monete produce un valore di gioco dispari ($\delta = 0, A = 1, B = 0$), quindi il ragionamento precedente dimostra che Francesca ha una strategia vincente in questo caso.