XIX GARA NAZIONALE DI MATEMATICA

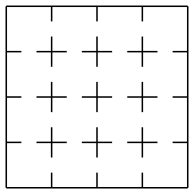
Cesenatico, 9 maggio 2003

Problema 1
Trovare tutti i numeri naturali n di tre cifre ($100 \leq n \leq 999$) che sono uguali al numero formato dalle ultime tre cifre di n^2.
Soluzione I numeri richiesti sono 376 e 625.
Il quadrato di n ha le stesse ultime tre cifre di n se e solo se $n^2 - n = n(n-1)$ è divisibile per $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Poiché n ed $n-1$ sono primi fra loro, uno solo dei due è pari ed uno solo dei due può essere divisibile per 5. Pertanto abbiamo le seguenti possibilità:

- n è divisibile sia per 2^3 che per 5^3, quindi n è divisibile per 1000: nessun numero n di 3 cifre ha questa proprietà;
- $n-1$ è divisibile sia per 2^3 che per 5^3, quindi $n-1$ è divisibile per 1000: nessun numero n di 3 cifre ha questa proprietà;
- n è divisibile per 2^3 ed $n-1$ è divisibile per 5^3; l'unico numero di 3 cifre con queste proprietà è $n = 376$, (una verifica diretta dà in effetti $n^2 = 141376$);
- n è divisibile per 5^3 ed $n-1$ è divisibile per 2^3; l'unico numero di 3 cifre con queste proprietà è $n = 625$, (una verifica diretta dà in effetti $n^2 = 390625$).

Seconda Soluzione
Rappresentiamo n come ABC, dove A, B, C sono le sue cifre decimali. Dobbiamo ottenere $ABC^2 = XYZABC$. Osserviamo che, in generale, l'ultima cifra di n^2 dipende solo dall'ultima cifra di n, così come le due ultime cifre di n^2 dipendono solo dalle ultime due cifre di n.
Per verifica diretta, la cifra C delle unità può essere solo $0, 1, 5, 6$.
Se $C = 0$, allora n è divisibile per 10, quindi n^2 è divisibile per 100 e quindi anche $B = 0$. Ma allora n è divisibile per 100, n^2 è divisibile per 10000 e quindi anche $A = 0$, non ammesso.
Se $C = 1$, poiché $(10B+1)^2 = 100B^2+20B+1$, dobbiamo avere $2B = B$, cioè $B = 0$, oppure $2B = 10+B$, impossibile. Se $B = 0$, poiché $(100A+1)^2 = 10000A^2 + 200A + 1$, otteniamo come sopra $A = 0$, e cioè $n = 1$, non ammesso.
Se $C = 5$, poiché $(10B+5)^2 = 100B^2+100B+25$, dobbiamo avere $B = 2$. Analogamente, da $(100A+25)^2 = 10000A^2 + 5000A + 625$ si ottiene $A = 6$. In effetti, $625^2 = 390625$ e quindi $n = 625$ è una soluzione.
Se $C = 6$, poiché $(10B+6)^2 = 100B^2 + 120B + 36$, dobbiamo avere $2B + 3 = B$, impossibile, oppure $2B + 3 = 10 + B$, cioè $B = 7$. Infine, da $(100A+76)^2 = 10000A^2 + 15200A + 5776$, si ricava $2A + 7 = A$, impossibile, oppure $2A + 7 = 10 + A$, ossia $A = 3$. In effetti, $376^2 = 141376$ e quindi $n = 376$ è una soluzione.

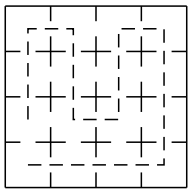
Problema 2
Un museo ha la pianta quadrata ed è suddiviso in n^2 stanze quadrate tutte uguali (con $n > 1$). Ogni coppia di stanze adiacenti (cioè con un muro in comune) comunica mediante una porta (come mostrato nell'esempio a fianco per $n = 4$). Il guardiano notturno vuole organizzare il suo giro di ispezione in modo da rispettare le seguenti regole: il guardiano parte da una certa stanza, dove rimane per un minuto, terminato il quale si sposta in una stanza adiacente, dove rimane per un altro minuto; il percorso prosegue collegando stanze adiacenti, in ognuna delle quali il guardiano rimane sempre esattamente un minuto prima di spostarsi.



È consentito ripassare più volte dalla stessa stanza, ma al termine del percorso (che non si trova necessariamente nella stanza d'inizio) il guardiano deve essere stato in ognuna delle n^2 stanze per esattamente k minuti.
Determinare per quali interi positivi n e k è possibile organizzare il percorso rispettando queste regole.

Soluzione

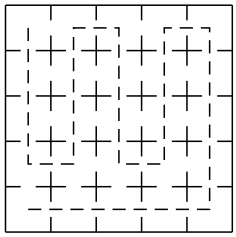
Se n è pari si riesce a costruire il percorso per qualsiasi k. Infatti si riesce ad esibire un percorso chiuso che passa una volta da ciascuna stanza, e facendo k giri si ottiene il tragitto del guardiano.



Supponiamo per comodità che il museo sia orientato lungo i punti cardinali. Un modo per costruire questo percorso è il seguente: il guardiano parte dalla sala nell'angolo a sud-ovest e procede lungo il lato sud fino ad arrivare all'angolo a sud-est.

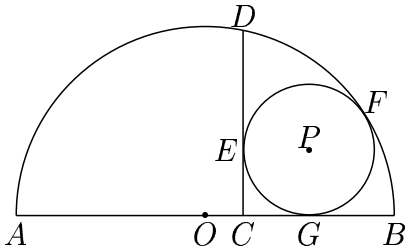
A questo punto deve ancora attraversare le stanze di un rettangolo $(n-1) \times n$, che percorre a serpentina. Si muove verso nord per $n-1$ sale (vedi esempio sopra per $n = 4$), poi si sposta a ovest e torna verso sud per $n-2$ stanze. A questo punto ha attraversato le due file di stanze più ad est. Se si sposta a ovest e ripete il procedimento, visto che n è pari, attraversa a coppie tutte le file di stanze e può ritornare alla fine nella sala da cui era partito.

Se invece n è dispari, il problema ha soluzione solo per $k = 1$. In questo caso è facile trovare il percorso, che però non ritorna al punto di partenza, facendo una serpentina nel modo descritto sopra. Per vedere che negli altri casi non c'è soluzione, pensiamo di colorare le stanze di bianco e nero, come in una scacchiera, con il nero negli angoli. È facile vedere che in questo modo le sale nere sono una di più di quelle bianche. Di conseguenza se il guardiano riuscisse a fare un percorso che passa k volte da ogni stanza dovrebbe aver visitato k sale nere in più di quelle bianche. Tuttavia può passare da una stanza solo ad un'altra di colore diverso, perciò la differenza tra sale nere e bianche visitate può essere al massimo 1 durante il tragitto, e per $k > 1$ non c'è soluzione.



Problema 3

Nella figura il punto C è interno al raggio OB di una semicirconferenza di centro O e il segmento CD è perpendicolare al diametro AB. Una circonferenza di centro P è inscritta come mostrato e risulta tangente all'arco BD in F, al segmento CD in E e al diametro AB in G. Dimostrare che il triangolo ADG è isoscele.



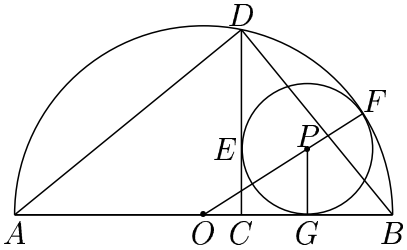
Soluzione

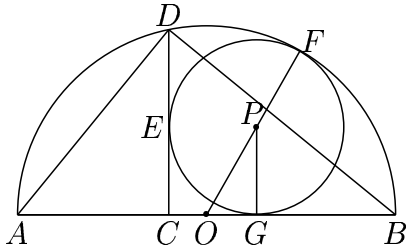
Osserviamo innanzitutto che i punti F, P ed O sono allineati: infatti sia P che O si trovano sulla perpendicolare alla tangente comune delle due circonferenze in F. Le rette EP e AB sono entrambe perpendicolari a CD, dunque parallele fra di loro. Di conseguenza gli angoli EPF e AOF sono uguali. Poiché i triangoli EPF e AOF sono isosceli, ne segue che sono simili tra loro, e dunque i punti F, E ed A sono allineati.

Per il primo teorema di Euclide si ha $AD^2 = AC \cdot AB$. I triangoli AEC e AFB sono entrambi rettangoli e con un angolo in comune, perció sono simili. Da questa similitudine si ricava $AC \cdot AB = AE \cdot AF$. Infine per il teorema della secante e della tangente si trova $AE \cdot AF = AG^2$. Questa catena di uguaglianze dá la tesi $AD = AG$.

Seconda Soluzione

Indichiamo con R il raggio della semicirconferenza e con r quello della circonferenza di centro P. Consideriamo il caso in cui entrambi i punti C e G appartengono a OB (il fatto che il punto G appartenga ad OB non implica necessariamente che anche il punto C appartenga ad OB, come si vede nella figura sotto a destra, ma la dimostrazione è di fatto identica nei due casi)





Si osservi che la retta per i due centri O e P passa per F in quanto è perpendicolare alla tangente comune alle due circonferenze in F. Pertanto per il teorema della secante e della tangente si ha

$$OG^2 = R(R - 2r) \qquad (1)$$

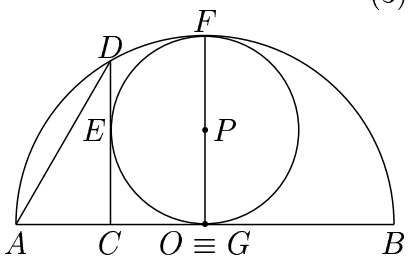
(questo risultato può essere ottenuto anche applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPG).

Si osservi poi che, per il primo teorema di Euclide, essendo $A\widehat{D}B$ retto, si ha $AD^2 = AC \cdot 2R$ ovvero $AD^2 = (R - r + OG) \cdot 2R$ e

$$AD^2 = 2R^2 - 2Rr + 2R \cdot OG. \qquad (2)$$

D'altra parte si ha $AG^2 = (AO + OG)^2 = R^2 + OG^2 + 2R \cdot OG$ e, usufruendo della (1),

$$AG^2 = 2R^2 - 2Rr + 2R \cdot OG. \tag{3}$$



Dalla (2) e dalla (3) segue allora $AD = AG$, cioè la tesi.
Osservazione: nel caso in cui G appartiene ad AO la dimostrazione è simmetrica. Nel caso in cui G coincida con O il risultato ottenuto diviene: se in una semicirconferenza si inscrive una circonferenza di raggio metà e DC è la tangente a quest'ultima perpendicolare al diametro AB, allora il segmento AD è pari al raggio della semicirconferenza, da cui la costruzione dell'esagono regolare.

Terza Soluzione

Con le stesse notazioni usate in precedenza indichiamo con x la lunghezza del segmento OC, con la convenzione che tale lunghezza è da considerarsi negativa se C appartiene ad AO.
Si ha $AG = R + r + x$, $AC^2 = (R + x)^2$ e, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo ODC, si ha $CD^2 = R^2 - x^2$, mentre un'altra applicazione dello stesso teorema fornisce $AD^2 = AC^2 + CD^2 = x^2 + R^2 + 2Rx + R^2 - x^2$. Dunque

$$AD^2 = 2R^2 + 2Rx. \tag{4}$$

D'altra parte

$$AG^2 = (R + r + x)^2 = R^2 + r^2 + x^2 + 2Rr + 2Rx + 2rx \tag{5}$$

e dunque

$$AG^2 - AD^2 = (r + x)^2 - R^2 + 2Rr \tag{6}$$

e siccome $(r + x)^2 = OG^2 = R(R - 2r)$ si ricava $AG = AD$.

Problema 4

In un'isola ci sono due categorie di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, e i furfanti, che mentono sempre. Un certo giorno si riunisce il gran consiglio, costituito da 2003 membri. Essi si siedono a caso intorno ad una tavola rotonda, e durante la riunione ciascuno di essi dichiara: *"Entrambi i miei vicini sono furfanti"*. Il giorno dopo il consiglio si riunisce di nuovo, ma uno dei membri è malato, per cui sono presenti solo 2002 membri. Essi si ridispongono nuovamente a caso intorno alla tavola rotonda e ciascuno di essi dice: *"Entrambi i miei vicini appartengono alla categoria opposta alla mia"*.
Il malato era un furfante o un cavaliere?

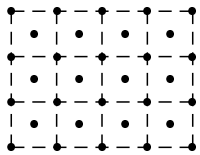
Soluzione

Il malato era un cavaliere.
Dalla dichiarazione del primo giorno si deduce che accanto ad ogni cavaliere ci sono due furfanti, mentre non è possibile che ci siano due furfanti accanto ad un furfante. In particolare, non ci possono essere tre furfanti consecutivi, e pertanto, su 3 persone sedute consecutivamente a tavola, almeno una è un cavaliere. Sommiamo il numero di presenze dei cavalieri su tutte le 2003 terne di posti consecutivi. Il totale deve essere almeno 2003 e, poiché in questo modo ogni cavaliere viene contato 3 volte (tante quante sono le terne di posti consecutivi in cui si trova), se ne deduce che il numero dei cavalieri deve essere maggiore o uguale ad un terzo dei presenti, cioè maggiore o uguale a 668.
Dalla dichiarazione del secondo giorno si deduce nuovamente che accanto ad ogni cavaliere ci sono due furfanti, mentre accanto ad un furfante non possono sedere due cavalieri. In tutti i casi, in una terna di persone consecutive ci può essere al massimo un cavaliere. Analogamente a prima, se ne deduce che il numero dei cavalieri presenti deve essere minore o uguale ad un terzo dei presenti, cioè minore o uguale a 667.
Dunque l'unica possibilità è che il malato fosse un cavaliere. Si noti infine che, se il malato era un cavaliere, la situazione descritta è effettivamente possibile: per esempio, nel primo giorno di riunione ci possono 668 cavalieri e 1335 furfanti seduti secondo lo schema CFFCFF.....CFFCFFCF e nel secondo giorno di riunione ci possono essere 667 cavalieri e 1335 furfanti seduti secondo lo schema CFFCFF.....CFFCFFF.
Nota: per ottenere che il primo giorno il numero dei cavalieri deve essere maggiore o uguale a 668, si può anche ragionare così: certamente c'è un cavaliere, e alla sua destra ci deve essere un furfante. Suddividento i restanti 2001 posti in 667 gruppi di tre consecutivi, si nota che in ciascuno di essi ci deve essere un cavaliere e quindi il numero totale dei cavalieri deve essere maggiore o uguale a 668. Analogamente, per il secondo giorno si può osservare che certamente c'è un furfante, e suddividendo gli altri 2001 posti in 667 gruppi di

3 consecutivi, si nota che in ciascuno di essi c'è al massimo un cavaliere, e quindi il numero dei cavalieri è minore o uguale a 667.

Problema 5

Data una griglia $m \times n$ $(m, n \geq 1)$ si dispone una pedina al centro di ogni casella e una in ogni vertice della griglia (nell'esempio mostrato a fianco con $n = 4$ e $m = 3$ si dispongono 32 pedine).



(a) Trovare tutte le tabelle che hanno esattamente 500 pedine.

(b) Dimostrare che esistono infiniti interi positivi k tali che non esistono griglie con esattamente k pedine.

Soluzione

Data una griglia $m \times n$, il numero di pedine poste sui vertici della griglia è $(m+1)(n+1)$, mentre il numero di pedine poste al centro di ogni casella è mn, sicché il totale di pedine é

$$N = 2mn + m + n + 1.$$

Osserviamo che

$$2N - 1 = 4mn + 2m + 2n + 1 = (2m + 1)(2n + 1)\ . \tag{7}$$

Poiché $m \geq 1$ ed $n \geq 1$, si ha $2m + 1 \geq 3$ e $2n + 1 \geq 3$; e quindi si deduce che le soluzioni corrispondono alle decomposizioni di $2N - 1$ come prodotto di due numeri dispari maggiori di 1. Se $N = 500$, $2N - 1 = 999 = 3^3 \cdot 37$, tali decomposizioni sono

$$N = 3 \cdot 333 = 9 \cdot 111 = 27 \cdot 37 = 37 \cdot 27 = 111 \cdot 9 = 333 \cdot 3$$

e dunque le coppie di numeri (m, n) relative alla domanda (a) sono le seguenti:

$$(1,\ 166), \quad (4,\ 55), \quad (13,\ 18), \quad (18,\ 13), \quad (55,\ 4), \quad (166,\ 1).$$

Per rispondere alla domanda (b), mostriamo che, se $2N - 1$ è primo, allora non esistono griglie con esattamente N pedine. In effetti un numero primo non si può scrivere come prodotto di due interi entrambi maggiori di 1.

Problema 6

Ad un pranzo sono state invitate n persone, che siederanno attorno ad una tavola rotonda, i cui posti sono stati contrassegnati da 1 ad n mediante opportuni cartellini segnaposto, distribuiti da un maestro cerimoniere.

Il cameriere ha deciso di servire le portate seguendo un procedimento originale: sceglie un invitato, lo serve, poi si sposta in senso antiorario di un numero di posti uguale al numero del segnaposto dell'invitato appena servito, serve l'invitato in corrispondenza del quale si trova ora, e così via, spostandosi sempre in senso antiorario in base al numero di segnaposto dell'ultimo invitato servito.

Determinare per quali n il maestro cerimoniere può sistemare i segnaposto in modo che il cameriere possa, partendo da un invitato opportuno e seguendo il procedimento descritto, servire tutti i commensali.

Soluzione

È possibile sistemare i segnaposto nel modo voluto se e solo se n è pari.

Se $n = 2k$ è pari, una possibile soluzione è la seguente: procedendo in senso orario lungo la tavola, il maestro cerimoniere piazza prima il segnaposto numero $2k$, poi tutti quelli pari in ordine crescente e quindi tutti i dispari in ordine crescente. Se ora il cameriere parte dal segnaposto 1 e segue la regola, percorre tutto il tavolo. Si verifica infatti che dopo aver servito un numero i dispari, il cameriere va al numero $2k - i - 1$, che è pari, e poi al numero $i + 2$, che è nuovamente dispari.

Il percorso del cameriere sarà dunque il seguente: 1, $2k - 2$, 3, $2k - 4$, 5, $2k - 6$, e così via, per terminare il percorso servendo il numero $2k$.

Mostriamo ora che se $n = 2k + 1$ è dispari, allora non c'è nessuna disposizione dei segnaposto che vada bene. Supponiamo infatti che una tale disposizione esista, e che il cameriere completi il tavolo servendo nell'ordine i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$. Allora $x_{2k+1} = 2k + 1$, in quanto se dovesse proseguire dopo aver servito il numero $2k + 1$, il cameriere dovrebbe fare un giro completo del tavolo e dunque tornare sullo stesso posto. Ma allora la somma dei numeri precedenti è

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} = 1 + 2 + \ldots + 2k = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

che è un multiplo di $2k + 1$. Ne segue che dopo aver servito i primi $2k$ invitati il cameriere è tornato al punto di partenza, dunque non servirà mai il numero $2k + 1$.