II GARA DEL PUBBLICO

Cesenatico, 5 maggio 2001

1. **La confederazione IMO** **15 punti**

   La confederazione IMO è una pacifica civiltà aliena che si trova nella Galassia Asip. La galassia è formata da n gruppi di stelle, ciascuno dei quali forma un cerchio. Il cerchio più piccolo (chiamato I_1) ha raggio 1 Imoparsec. Se ad esso si circoscrive un quadrato e a questo si circoscrive un cerchio si trova la seconda cintura di stelle (I_2). In maniera analoga a partire da I_2 si ottiene I_3,e poi I_4, I_5, ... L'ultima cintura è l'unica che ha un raggio più grande di 200 Imoparsec. Quante sono in tutto le cinture?

2. **Toponomastica** **20 punti**

   I pianeti della confederazione vengono identificati da una coppia di numeri naturali. La capitale (il pianeta d'origine della civiltà) è $(0,0)$ e il primo pianeta colonizzato viene identificato con la coppia $(1,0)$, il secondo da $(0,1)$, il terzo da $(2,0)$, il quarto da $(1,1)$ e così via. Che posizione occupa il pianeta $(15,30)$ nella storia dei pianeti colonizzati dagli Imo?

   (NB: Più formalmente (a,b) viene prima di (c,d) se e solo se:

   $a+b<c+d$ oppure $a+b=c+d$ e $a>c$.)

3. **Imontecitorio** **60 punti**

   Il parlamento della confederazione ha come base un triangolo di cui un angolo è doppio dell'altro. Tutti i lati del triangolo hanno lunghezza intera e uno misura 35 imometri. Quanto può essere lungo, al massimo, il perimetro dell'edificio?

4. **Il parco** **40 punti**

   Nel parco davanti al parlamento c'è un'aiuola a forma di triangolo rettangolo tagliata in due parti dalla strada che porta all'ingresso del Senato (vedi figura). I lati dell'aiuola, il tratto di strada AD e i lati BD e DC hanno lunghezza intera e BC misura 20 imometri. Quanti imometri misura DC (scrivere 0 se i dati sono insufficienti a risolvere il problema)?

5. **Strane leggi** **65 punti**

   Uno dei provvedimenti più contestati del Senato imese è una legge che proibisce la pubblicazione di cruciverba. Alcune associazioni studentesche hanno lanciato per protesta il crucinumero sul mensile "Contestazione".

1	2	3	4
2			
3			
4			

Orizzontali
(1) La risposta esatta a questo gioco.
(2) È un numero primo, uguale al prodotto di più primi consecutivi meno 1 (esempio $5 \times 7 \times 11 - 1$, anche se questo non è un numero primo).
(3) Prodotto di tre numeri consecutivi (esempio $4 \times 5 \times 6$).
(4) È prodotto di due primi.
Verticali
(1) Somma di cubi di due numeri primi.
(2) Numero palindromo di 4 cifre potenza di un primo (un numero palindromo è un numero che non cambia se lo si legge da destra a sinistra).
(3) È un numero primo.
(4) 3 verticale al quadrato.

(NB: La risposta a una qualsiasi delle definizioni può anche essere un numero minore di 1000. Se una delle risposte dovesse essere, ad esempio, 13 nella tabella si inserisca 0013)

6. **Abbonamenti** **45 punti**

Per abbonarsi a "Contestazione" bisogna pagare 40 Scudi all'Associazione Liberi Studenti Imesi. Nella confederazione si possono trovare banconote di ogni valore da 1 a 100 Scudi. In quanti modi un Imese può pagare l'abbonamento a "Contestazione" usando tre banconote diverse tra loro?

7. **Giochi** ... **25 punti**

I periodici imesi sono ricchi di rubriche su solitari e passatempi. Eccone uno. Si parte con tre punti su una circonferenza; una mossa consiste nel tracciare le bisettrici del triangolo individuato dai tre punti e considerare i punti che tali bisettrici intercettano sulla circonferenza. Xam inizia a giocare con dei punti che sulla circonferenza individuano archi di lunghezza 1, 2 e 3. Xam si ferma dopo 1000 mosse. Quante cifre dopo la virgola ha il prodotto delle lunghezze dei 3 archi individuati dagli ultimi punti disegnati?

8. ... **e passatempi** **30 punti**

Eccone un altro. Si parte con un certo numero di mucchi di pietre e sono consentite le seguenti operazioni: se ne possono unire due e se ne può dividere uno in due mucchi uguali (se il numero delle sue pietre è pari). Supponendo che Obob parta con 3 mucchi fatti rispettivamente di 88, 215, e 72 pietre qual è il numero massimo di mucchi a cui può arrivare?

9. **Antiche civiltà** **60 punti**

Uno dei più importanti problemi dell'archeologia Imese è la decifrazione dei numeri della civiltà Qwghlm, della quale si conosce piuttosto bene la scrittura. È dato per scontato che i Qwghlmiani usassero un sistema in base 8, avendo 8 tentacoli. Un brillante archeologo ha appena trovato una pagina di un vecchio quaderno di matematica con su scritto:

"usando il metodo di 'Rtennio [NDR: un noto matematico Qwghlmiano] si conclude che le radici del polinomio

$$x^4 - \Lambda\Gamma x^2 \ldots x + \ldots = 0$$

sono tutte intere"

Le lettere greche rappresentano due diverse cifre Qwghlmiane ignote. Calcolare il massimo valore che può assumere il termine noto.

10. **Architettura** **20 punti**

La tipica casa imese è formata da tre camere quadrate di lato lungo 30 imometri collegate da un vano a forma triangolare, in modo che ogni lato di questo vano coincida con un lato di una delle camere. Il tetto è un cono circolare retto. Qual è il raggio minimo che la base del tetto deve avere affinché tutta la casa sia coperta? (Nella risposta indicate solo la parte intera del numero trovato)

11. **Arredamento** **40 punti**

Gli orologi a muro in uso nella confederazione hanno tutti la forma di un rettangolo avente l'angolo tra le diagonali di 45°. Il lato maggiore è parallelo al suolo, mentre il lato minore misura 1336 imopollici. Vi è solamente una lunga lancetta delle ore che si muove come la nostra e dopo mezza giornata ha compiuto un giro esatto. Nella capitale un giorno dura 20 ore; in questo momento è l'una un quarto e la lancetta individua un punto che divide in due segmenti il lato maggiore del rettangolo. Qual è la lunghezza del minore dei due segmenti?

12. **Civiltà alternative** **30 punti**

Un altro antico popolo esistito prima della nascita della confederazione rappresentava ogni numero mediante una sequenza di due simboli: $\circ$ e $\triangle$. Il simbolo $\circ$ in fondo a una sequenza significava aggiungere un'unità, mentre il simbolo $\triangle$ significava moltiplicare per 7. Ad esempio, la sequenza $\circ\circ\circ\circ\triangle\circ$ rappresentava il numero 29. Qual è il numero minimo di simboli necessari per rappresentare il numero 1000?

13. **Calendari** **30 punti**

Nel calendario imese gli anni bisestili sono quelli corrispondenti a numeri la cui somma delle cifre è 6 (ad esempio l'anno 1060 è bisestile). Quanti anni bisestili ci sono stati tra l'anno zero e l'anno 7000?

14. **Casabianca** **30 punti**

Il presidente della confederazione Ocram Itrof vuole farsi una piscina nel giardino della sua villa. Poiché non ama le figure geometriche troppo complicate decide che la sua piscina avrà forma rettangolare, così come è rettangolare il suo giardino. Inoltre vorrebbe mettere intorno alla vasca un vialetto costituito da tre tratti diritti in modo da formare un triangolo. Considerando trascurabile la larghezza del vialetto, quale sarà al più l'area base della piscina (in im^2) se il giardino si estende per 5200 im^2?

15. **Rivalità sportive** **55 punti**

Due fratelli Imesi in orbita attorno alla Terra hanno appena assistito in Imo–visione al quinto set della partita di pallavolo Italia-Jugoslavia, che si è concluso con il punteggio di 15-10 a favore della Jugoslavia. *"Peccato, dopo i 6 punti consecutivi di Sartoretti pensavo proprio che potessimo rimontare"*, dice Oloap, che tifa per l'Italia. *"Ti sbagli"*, dice Aerdna, *"l'Italia non ha mai conquistato più di 5 punti consecutivi"*. Oloap guarda le statistiche, vede che in tutto il set ci sono stati 7 cambi palla e si mette a calcolare la probabilità che lui abbia ragione (calcolando il numero di tutti i possibili andamenti del punteggio, quelli che gli darebbero ragione e ricavando la percentuale trascurando le cifre decimali). Che percentuale troverà Oloap?

NB: Una squadra fa punto anche quando ottiene il cambio palla.

16. **Patrimoni** **30 punti**

Di ritorno dal loro viaggio Aerdna ed Oloap ereditano da un prozio un campo di forma quadrata il cui lato è lungo 200 imotavole. Nel testamento si dice che la divisione del campo deve essere fatta tracciando una retta che taglia due lati opposti in modo che la differenza dei perimetri delle due parti sia 300 imotavole. Qual è il rapporto tra l'area della parte più estesa e l'area di quella meno estesa?

17. **Ancora archeologia** **45 punti**

Grazie anche al vostro aiuto il sistema di numerazione della civilità Qwghlm è stato finalmente decifrato. Ora potete apprezzare un altro problema trovato da alcuni valenti archeologi e tradotto nel nostro sistema decimale

"Quali sono le ultime quattro cifre del coefficiente più grande (in valore assoluto) del polinomio

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)(x-32)\ ?''$$

18. **Banche generose** **25 punti**

L'economia Imese è soggetta a una forte svalutazione e quindi i tassi di interesse sono molti alti. In particolare con gli attuali tassi della BCI dopo 20 anni l'ammontare di un conto corrente viene quadruplicato. Supponendo che oggi Ocnarf depositi uno scudo e che i tassi rimangano sempre gli stessi, quali saranno le ultime 4 cifre dell'estratto conto che gli eredi di Ocnarf potranno leggere tra 20000 anni?

19. **Algebristi imesi** **45 punti**

Nei libri di testo della confederazione vengono detti "onesti" quei polinomi i cui coefficienti sono numeri interi tali che la somma dei loro quadrati sia minore o uguale al grado del polinomio. Quanti sono i polinomi onesti (di una variabile) di grado minore o uguale a quattro?

(NB: I polinomi costanti nonnulli hanno grado 0 e il polinomio 0 per convenzione ha grado $-\infty$: pertanto quest'ultimo non è un polinomio onesto)

20. **Arte imese** **25 punti**

Vicino al palazzo del parlamento c'è una piazza con tre fontane circolari. Due di esse hanno raggio 64 imometri, sono tangenti esternamente e tangenti a un viale alberato. La terza è tangente esternamente alle prime due ed al viale. Quanti imometri è lungo il suo raggio?

Istruzioni generali

Si ricorda che in tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero, compreso tra 0000 e 9999. Qualora la quantità richiesta non dovesse risultare un numero intero, si indichi la sua parte intera. Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7320$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\pi = 3,1416$.