ZANICHELLI

Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore
Ministero della Pubblica Istruzione

Best Western

Gara Nazionale Classi Prime 2013

Problemi

Nella lista che segue la risposta corretta è sempre la **A**. *Ovviamente, nelle 36 versioni del test che sono state fornite ai responsabili locali per la gara, sia i problemi che le risposte erano permutati in modo casuale.*

I problemi secondo noi più semplici sono stati marcati col simbolo $\mathcal{F}$.

1. $\mathcal{F}$ Siano $a = 2255$ e $b = 2256$. Qual è la cifra delle unità del minimo comune multiplo di a e b?

A 0 B 2 C 4 D 8 E 5 F 6

2. $\mathcal{F}$ Nel ristorante "Allo Zoo" i pasti sono formati da un secondo, un contorno e un bicchiere di vino. Il secondo piatto può essere scelto tra pesce gatto, pescecane e bistecca; il contorno tra patate arrosto, insalata e peperoni; il vino tra bianco, rosso e rosato. Chi ordina pesce non può bere vino rosso. Quanti sono le possibili composizioni di un pasto?

A 21 B 27 C 9 D 14 E 24 F 32

3. $\mathcal{F}$ In un triangolo ABC sappiamo che $AB = 109.7\,\text{cm}$ e $AC = 112.6\,\text{cm}$ e che la misura del lato BC, espressa in cm, è intera. Quanti sono i possibili valori diversi per la lunghezza del lato BC?

A 220 B 256 C 108 D 276 E 144 F 193

4. $\mathcal{F}$ Alberto ha dimenticato la combinazione della sua cassaforte, ma si ricorda che era un numero di quattro cifre, tutte diverse da zero e non necessariamente diverse tra loro, e che la somma della prima e dell'ultima cifra è 9, mentre la somma della seconda e della terza è 7. Quanti tentativi dovrà fare, al massimo, per aprire la cassaforte?

A 48 B 24 C 14 D 96 E 72 F 63

5. $\mathcal{F}$ Dato un quadrilatero convesso $ABCD$, si considerino le affermazioni:

(**a**) se la diagonale AC è bisettrice degli angoli in A e in C e $AB = BC$, allora $ABCD$ è un rombo;

(**b**) se la diagonale AC è bisettrice dell'angolo in A e $AB = BC$, allora $ABCD$ è un rombo;

(**c**) se la diagonale AC è bisettrice degli angoli in A e in C e $AB = AD$, allora $ABCD$ è un rombo.

Allora quelle corrette sono:

A solo (**a**) B nessuna C tutte D solo (**c**) E solo (**a**) e (**b**) F solo (**a**) e (**c**)

6. $\mathcal{F}$ In un recinto ci sono struzzi, tori e unicorni (gli unicorni sono animali con 4 gambe e un solo corno sulla testa). Sappiamo che in tutto ci sono 100 teste, 364 gambe e 141 corna. Quanti sono gli unicorni?

A 23 B 31 C 29 D 45 E 19 F non ci sono dati sufficienti per stabilirlo

7. $\mathcal{F}$ L'insegnante di matematica della classe IB, nei compiti in classe, ha l'abitudine di preparare due test diversi (A e B) e di far svolgere esattamente a metà degli studenti il test di tipo A e all'altra metà il test di tipo B.
Alla fine del quadrimestre nota con piacere che nessuno studente è mai stato assente durante i compiti in classe. Nota inoltre che, comunque si prendano due studenti, c'è almeno uno dei 5 compiti in classe in cui hanno svolto test diversi.
Quanti sono al massimo i ragazzi?

A 32 B 10 C 24 D 36 E 16 F non c'è un massimo perché è possibile soddisfare le condizioni richieste con un numero arbitrariamente alto di studenti

8. Per dipingere un muro, Luca impiega 8 ore, mentre Paolo, che è più lento, per fare lo stesso lavoro ci metterebbe il doppio del tempo. Se decidono di lavorare insieme, quanto tempo impiegheranno a dipingere il muro?

A 5 ore e 20 min. B 6 ore C 4 ore e 30 min. D 5 ore e 15 min. E 4 ore e 40 min. F 5 ore

9. Dato un rettangolo $ABCD$, aumentando sia la base che l'altezza di 1 centimetro, si ottiene che l'area aumenta di $187\,\text{cm}^2$. Qual è il perimetro di ABCD?

A 372 cm B 187 cm C 186 cm D 748 cm E 558 cm F non ci sono dati sufficienti per stabilirlo

10. Luca ha molte palline (più di 100 ma meno di 1000) e prova a metterle in scatole della capienza di 6 palline ciascuna. Scopre però che, così facendo, l'ultima scatola non viene riempita per intero, ma con solo 5 palline. Lo stesso succede se, invece di usare scatole da 6 palline, usa tutte scatole da 7 palline, oppure tutte scatole da 8 palline, oppure tutte scatole da 9 palline: nell'ultima scatola finiscono sempre esattamente 5 palline.
Quante palline ha Luca?

A 509 B 341 C 439 D 383 E 677 F non ci sono dati sufficienti per stabilirlo

11. Al polinomio $x^8 + x^4$ si vuole aggiungere un monomio (di grado diverso da 4 e da 8) in modo che il trinomio che si ottiene sia il quadrato di un binomio.
In quanti modi diversi lo si può fare?

A 4 B 1 C 2 D 3 E 5 F più di 5

12. Un numero intero positivo verrà detto **buono** se soddisfa entrambe le seguenti proprietà:

(**a**) contiene solo le cifre "1", "2", "3" e "4", ciascuna almeno una volta;

(**b**) permutando le sue cifre non si può mai ottenere un numero più piccolo.

Quanti sono i numeri **buoni** di 6 cifre?

A 10 B 25 C 12 D 6 E 24 F 32

13. L'isola Kenoncè ha non meno di 2013 abitanti e ciascuno di essi può essere o un Fante o un Cavaliere. I Fanti mentono sempre mentre i Cavalieri dicono sempre la verità. Alla sera cenano tutti insieme ad un enorme tavola rotonda con esattamente tanti posti quanti sono gli abitanti, sedendosi in modo tale da poter pronunciare tutti insieme la seguente frase:

"Le prime 5 persone che si trovano alla mia destra sono tutte dei Fanti"

Qual è il minimo numero di abitanti che può avere l'isola?

A 2016 B 2013 C 2014 D 2015 E 2017 F 2018

14. Sia p il più grande numero primo che divide 251001. Allora:

A $150 \leq p \leq 199$ B $100 \leq p \leq 149$ C $p \leq 99$ D $200 \leq p \leq 249$ E $250 \leq p \leq 299$ F $p \geq 300$

15. In quanti modi, in una scacchiera 8×8, posso scegliere un sottoinsieme non vuoto di caselle a forma di rettangolo? (tra le scelte valide vanno contate anche l'intera scacchiera e i rettangoli costituiti da una sola casella)

A 1296 B 1440 C 1024 D 1600 E 1225 F 1156

16. In quanti modi diversi posso mettere insieme la quantità di 1 euro utilizzando solo monetine da 1, 2 e 5 centesimi?

A 541 B 520 C 495 D 512 E 496 F nessuna delle altre risposte è esatta

17. Sia n il prodotto di tutti gli interi positivi che dividono 576 (compreso il numero stesso).
Quanto vale $\sqrt[21]{n}$?

A 24 B 32 C 144 D 12 E 18 F non è un numero intero

18. Un trapezio rettangolo è diviso dalle diagonali in 4 triangoli: il più piccolo ha area $396\,\text{cm}^2$ e il più grande ha area $539\,\text{cm}^2$.
Qual è l'area del trapezio?

A $1859\,\text{cm}^2$ B $1757\,\text{cm}^2$ C $1911\,\text{cm}^2$ D $2013\,\text{cm}^2$ E $1835\,\text{cm}^2$ F non ci sono dati sufficienti per stabilirlo

19. Claudia e Luca fanno il gioco seguente: all'inizio Claudia mette sul tavolo una pila costituita da non più di 200 monete, poi a turno, cominciando da Luca, ciascun giocatore, a sua scelta, toglie 7 monete oppure aggiunge 4 monete alla pila. Perde chi si ritrova a dover muovere con la pila vuota.
Qual è il massimo numero di monete che Claudia può mettere sul tavolo se vuole essere sicura di poter vincere la partita, qualsiasi siano le mosse che farà Luca?

A 198 B 200 C 199 D 197 E 194 F 3

20. Data una coppia (a, b) di numeri interi positivi, con $a > b$, conveniamo di chiamare *riduzione di* (a, b), la coppia (b, r) ottenuta prendendo il secondo elemento b della coppia di partenza ed il resto r della divisione tra a e b.
Immaginiamo poi di partire da una coppia di numeri e di operare successive riduzioni, finché questo è possibile, cioè finché i due numeri rimangono strettamente positivi.
Ad esempio, partendo dalla coppia $(59, 8)$ si riesce ad operare 4 *riduzioni* perché $(59, 8) \to (8, 3) \to (3, 2) \to (2, 1) \to (1, 0)$.
Qual è il massimo numero di riduzioni che si riesce a fare partendo da una coppia (a, b) di interi positivi entrambi minori di 1000?

A 14 B 10 C 9 D 99 E 17 F 8

Soluzioni

Soluzione del Quesito 1.

La risposta corretta è 0.
Infatti, detto m il minimo comune multiplo di a e b, dal fatto che 5 divide a e che 2 divide b, segue che m è divisibile sia per 2 che per 5. Ciò significa che m è divisibile per 10, cioè che termina per 0.

Soluzione del Quesito 2.

La risposta corretta è 21.
Per procedere nel conteggio, conviene distinguere i casi a seconda del vino che si prende.
Se si prende il vino rosso, è forzata la scelta della bistecca come secondo, quindi le composizioni possibili per il pasto sono solo 3, visto che 3 sono i contorni possibili.
Se si prende il vino rosato, invece, le possibilità sono 9, visto che sia il secondo sia il contorno possono essere scelti in 3 modi diversi.
Per il vino bianco, infine, le possibilità sono 9, come quelle per il vino rosato.
In tutto quindi le diverse composizioni possibili per il pasto sono $3+9+9$, cioè 21.

Soluzione del Quesito 3.

La risposta corretta è 220.
Infatti sappiamo che in un triangolo un lato può assumere ogni valore minore della somma degli altri 2 lati ma maggiore della loro differenza.
Nel nostro caso abbiamo $AC + AB = 222,3\,\text{cm}$ e $AC - AB = 2,9\,\text{cm}$.
Di conseguenza la misura in cm di BC può assumere tutti i valori interi che vanno da 3 a 222, che sono appunto 220.

Soluzione del Quesito 4.

La risposta corretta è 48.
Per verificarlo, indichiamo con a, b, c e d, in questo ordine, le 4 cifre della combinazione.
I modi di scegliere le cifre a e d in modo che la somma sia 9 sono 8.
Infatti, a può assumere qualsiasi valore da 1 a 8 (0 e 9 no perché sappiamo che né a né b possono valere 0) dopodiché, una volta fissato il valore di a, il valore di d è $9-a$.
Analogamente ci sono 6 modi di fissare le cifre b e c in modo che la loro somma sia 7.
Di conseguenza i modi di scegliere le quattro cifre della combinazione sono in tutto $8 \cdot 6$, cioè 48.

Soluzione del Quesito 5.

La risposta corretta è *"solo* **(a)***"*.
Per mostrare che **(a)** è vera si osservi (vedi fig. **1**) che da $AB = BC$ segue che $\widehat{CAB} = \widehat{ACB}$.

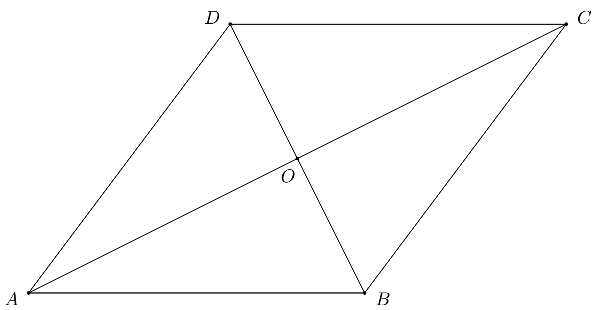

figura 1

Combinando ciò, col fatto che AC biseca sia $\widehat{DAB}$ che $\widehat{BCD}$, si ottiene $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} = \widehat{ACB} = \widehat{ACD}$.
Ma allora, da $\widehat{CAD} = \widehat{ACB}$ segue che AD è parallelo a BC, mentre da $\widehat{CAB} = \widehat{ACD}$ segue che AB è parallelo a DC.
Quindi $ABCD$ è un parallelogrammo, ma essendo $AB = BC$, segue che tutti i 4 lati sono congruenti e quindi si tratta di un rombo.
Invece l'affermazione **(b)**, che ha l'ipotesi più debole di **(a)** perché non si richiede che AC bisechi $\widehat{BCD}$, è falsa.
Infatti (vedi fig. **2**) preso un rombo $ABCE$, se si prende un punto D sul lato AE distinto da A e da E, le ipotesi dell'affermazione **(b)** sono tutte soddisfatte, ma la tesi no.

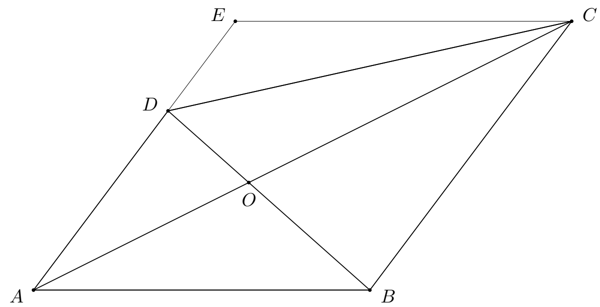

figura 2

Infine anche l'affermazione **(c)** è falsa, perché come controesempio (vedi fig. **3**) basta prendere un rombo $ABED$ e, detto O il punto di intersezione delle diagonali, fissare un punto C sul segmento OE. Il quadrilatero $ABCD$ soddisfa le ipotesi dell'affermazione **(c)** ma non è un rombo.

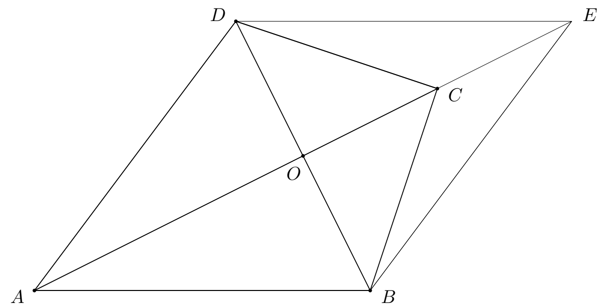

figura 3

Soluzione del Quesito 6.

La risposta corretta è 23.
Notiamo che se ci fossero solo animali a 4 gambe (tori e unicorni) le gambe sarebbero 400. Inoltre ogni volta che un qualsiasi animale a 4 gambe è sostituito da uno struzzo, il numero di gambe si abbassa di 2 unità. Quindi se le gambe sono 364, cioè 36 in meno di 400, il numero di struzzi deve essere 18.
Quindi gli animali a 4 gambe sono $100 - 18$, cioè 82.
Se tutti gli 82 animali a 4 gambe fossero tori, ci sarebbero in tutto 164 corna.
Anche in questo caso osserviamo che ogni volta che un toro è sostituito da un unicorno il numero di corna si abbassa di un'unità. Per far passare le corna da 164 a 141 bisogna abbassarne il numero di 23 unità, quindi il numero di unicorni deve essere uguale a 23.
In alternativa a questo procedimento risolutivo, si poteva anche adottarne un altro, più semplice, che però, a questo punto dell'anno scolastico, non sarebbe stato accessibile ai ragazzi di classe prima: bastava infatti indicare con x il numero degli struzzi, con y quello degli unicorni e con z quello dei tori e impostare il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y + 2z = 141 \\ 2x + 4y + 4z = 364 \end{cases}$$

Infatti la prima equazione deriva dal fatto che le teste sono 100, la seconda dal fatto che le corna sono 141 e la terza dal fatto che le gambe sono 364.

Soluzione del Quesito 7.

La risposta corretta è 32.
Per verificarlo immaginiamo di costruire, per ogni studente, una parola di 5 lettere ottenuta scrivendo, nell'ordine in cui li ha fatti, le versioni che gli sono capitate nei 5 compiti in classe.
Ad esempio, associare ad uno studente la parola **AABAB** significa che gli sono capitate la versione **A** nel primo e nel secondo compito in classe, poi la versione **B** nel terzo, la **A** nel quarto ed infine la **B** nel quinto.
Dire che, comunque si prendano due studenti, c'è almeno un compito in cui hanno svolto una versione diversa tra le due possibili **A** e **B**, equivale a dire che ad ogni studente viene associata una parola diversa.
Basterà dunque contare quante sono le parole di 5 lettere fatte solo con lettere **A** e **B**.
Poiché ognuno dei 5 caratteri di cui la parola è costituita può assumere due valori, il numero totale di tali parole è $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, cioè 32.

Soluzione del Quesito 8.

La risposta corretta è *"5 ore e 20 min."*.

Infatti, se Luca lavora con velocità doppia di Paolo, quando terminano il lavoro la parte eseguita da Luca è doppia di quella eseguita da Paolo.
Ciò significa che, a lavoro finito, 2/3 del muro sono stati dipinti da Luca mentre 1/3 del muro è stato dipinto da Paolo.
Di conseguenza il tempo impiegato dai due per terminare il lavoro è uguale al tempo che Luca impiega a dipingere 2/3 di muro, cioè 2/3 di 8 ore, cioè 5 ore e 20 minuti.

Soluzione del Quesito 9.

La risposta corretta è 372cm.
Infatti, dette b e h la base e l'altezza del rettangolo, sappiamo che aumentando entrambe di 1 centimetro, l'area aumenta di $187\,\mathrm{cm}^2$, cioè che

$$(b + 1\mathrm{cm}) \cdot (h + 1\mathrm{cm}) = bh + 187\mathrm{cm}^2.$$

Sviluppando al primo membro si ottiene:

$$bh + b \cdot 1\mathrm{cm} + h \cdot 1\mathrm{cm} + 1\mathrm{cm}^2 = bh + 187\mathrm{cm}^2,$$

che, semplificando, diventa:

$$(b + h) \cdot 1\mathrm{cm} = 186\mathrm{cm}^2,$$

cioè:

$$b + h = 186\mathrm{cm}.$$

Questo ci permette di calcolare il perimetro, perchè:

$$\text{perimetro} = 2(b + h) = 372\mathrm{cm}.$$

Soluzione del Quesito 10.

La risposta corretta è 509.
Infatti, detto n il numero delle palline di Luca, le condizioni del problema ci dicono che, togliendo 5 ad n, si ottiene un numero che è divisibile esattamente per 6, per 7, per 8 e per 9.
Ciò significa che $n - 5$ è divisibile per il minimo comune multiplo tra 6, 7, 8 e 9, che è 504.
Di conseguenza, visto che n deve essere compreso tra 100 e 1000, l'unico valore possibile per $n - 5$ è proprio 504, da cui segue che $n = 509$.

Soluzione del Quesito 11.

La risposta corretta è 4.
Siccome il trinomio che dobbiamo ottenere deve essere il quadrato di un binomio, dovranno esistere due monomi tali che due termini del monomio siano i loro quadrati mentre il terzo sia il loro doppio prodotto. Risolviamo quindi il problema distinguendo 3 casi:

I) il doppio prodotto è il termine che si aggiunge;

II) il doppio prodotto è x^4;

III) il doppio prodotto è x^8.

I caso: Poichè il doppio prodotto è il termine da aggiungere, scriviamo i due termini già presenti nel modo seguente:

$$\left(x^4\right)^2 + \left(x^2\right)^2.$$

Il terzo termine dovrà quindi essere $\pm 2 \cdot x^4 \cdot x^2$. Si ottiene quindi:

$$\left(x^4\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + 2 \cdot x^4 \cdot x^2 = \left(x^4 + x^2\right)^2,$$

oppure:

$$\left(x^4\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - 2 \cdot x^4 \cdot x^2 = \left(x^4 - x^2\right)^2.$$

II caso: Poichè il doppio prodotto deve essere x^4, riscriviamo i due termini già presenti nel modo seguente:

$$\left(x^4\right)^2 + 2 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{2}.$$

Chiaramente in tal caso il termine da aggiungere è i quadrato mancante, cioè $\frac{1}{4}$.
Si ottiene:

$$\left(x^4\right)^2 + 2 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \left(x^4 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

III caso: Stavolta il doppio prodotto deve essere x^8, quindi riscriviamo i due termini già presenti nel modo seguente:

$$\left(x^2\right)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{x^6}{2}.$$

Anche stavolta il termine da aggiungere è il quadrato mancante, cioè $\left(\frac{x^6}{2}\right)^2$.

Si ottiene:

$$\left(x^2\right)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{x^6}{2} + \left(\frac{x^6}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{x^6}{2}\right)^2.$$

Riassumendo, i modi di aggiungere un monomio al binomio di partenza in modo da ottenere il quadrato di un binomio sono 4.

Soluzione del Quesito 12.

La risposta corretta è 10.
Per verificarlo osserviamo che, grazie alla proprietà **(b)**, una volta che siano state scelte le 6 cifre da usare, esiste un solo numero **buono** che si può costruire con esse: quello in cui tali cifre compaiono disposte in ordine crescente, da sinistra a destra.
Per contare i numeri **buoni** di 6 cifre basterà quindi contare in quanti modi posso scegliere 6 cifre in modo che venga rispettata la condizione **(a)**. Ciò significa che, dovendo comunque sempre prendere almeno una cifra per ognuno dei quattro tipi consentiti, basterà contare in quanti modi posso scegliere le due cifre rimanenti, dopo che ne avrò presa una per ciascuno dei 4 tipi.
Ci siamo dunque ricondotti al seguente problema: in quanti modi posso scegliere 2 oggetti, anche uguali tra loro, prendendoli tra 4 tipi diversi?
Ovviamente, a questo punto, si tratta di un problema standard (combinazioni con ripetizione) che comunque potrebbe non essere noto ad un ragazzo di classe prima.
Trattandosi però di numeri molto piccoli, il conteggio può agevolmente essere fatto a mano. Infatti esistono 4 modi di scegliere le due cifre in modo che siano uguali (un modo per ciascuno dei 4 tipi). Dopodiché i modi di sceglierle in modo che siano diverse fra loro sono i seguenti 6: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$ e $\{3,4\}$.
Complessivamente, quindi, ci sono 10 modi di scegliere le 2 cifre rimanenti.
Ciò significa che i numeri **buoni** di 6 cifre sono solo 10.

Soluzione del Quesito 13.

La risposta corretta è 2016.
Per verificarlo basta dimostrare che c'è un modo di far sedere a tavola gli abitanti dell'isola in modo che pronuncino la fatidica frase se e solo se il loro numero è un multiplo di 6: fatto ciò, infatti, basta osservare che 2016 è il più piccolo multiplo di 6 maggiore o uguale a 2013.
A tale scopo si osservi che, quando tutti sono seduti a tavola, non possono esserci mai 6 Fanti seduti in posti consecutivi, perché altrimenti il Fante più a sinistra direbbe la verità, in contrasto con la sua natura di mentitore.
In particolare da questo segue che sull'isola, per ogni 5 fanti, c'è almeno un Cavaliere.
Notiamo inoltre che, quando si siedono a tavola, due Cavalieri devono sempre essere separati da almeno 5 fanti perché altrimenti il Cavaliere più a sinistra direbbe il falso.
Ne segue che l'unica configurazione ammissibile di posti a tavola è quella in cui si alternano 5 Fanti e un Cavaliere. Inoltre è immediato verificare che, seduti secondo tale configurazione, quando pronunciano la fatidica frase i Cavalieri stanno dicendo la verità mentre i Fanti stanno mentendo.
Possiamo quindi concludere che gli abitanti dell'isola possono pronunciare tale frase se e solo se sono seduti a tavola in modo da alternare 5 Fanti e un Cavaliere.
Naturalmente da ciò segue che i Cavalieri sono esattamente 1/5 dei Fanti, cioè 1/6 del totale degli abitanti dell'isola e quindi il totale degli abitanti è un multiplo di 6.

Soluzione del Quesito 14.

La risposta corretta è $150 \leq p \leq 199$.
L'unica difficoltà in questo problema è quella di fattorizzare 251001 in modo efficiente.
A tale scopo osserviamo che:

$$251001 = 250000 + 1000 + 1 = 500^2 + 2 \cdot 500 + 1^2 = (500 + 1)^2 = 501^2$$

A questo punto fattorizzare 501 è più semplice. Infatti $501 = 3 \cdot 167$ e, dopo aver verificato che 167 non è divisibile per 3, 5, 7 e 11, si può concludere è primo, dato che $13^2 = 169 > 167$.
Concludiamo quindi che la fattorizzazione di 251001 è $3^2 \cdot 167^2$ e quindi il più grande primo che lo divide è $p = 167$.

Soluzione del Quesito 15.

La risposta corretta è 1296.
Come si può esservare nella figura **4**, per contare quanti sono i rettangoli richiesti, basta contare in quanti modi diversi si può sceglierne la proiezione AB sul lato orizzontale e la proiezione CD sul lato verticale.

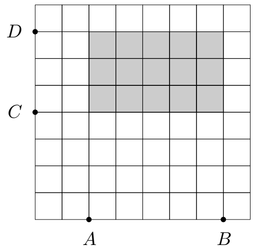

figura 4

In entrambi i casi il problema equivale a contare in quanti modi si possono scegliere i due estremi tra i nove punti possibili, cosa che si può fare in 36 modi. Quindi i possibili rettangoli sono $36 \cdot 36$, cioè 1296.

Soluzione del Quesito 16.

La risposta corretta è 541.
Per contare i modi, classifichiamoli a seconda di quante sono le monete da 5 centesimi utilizzate.
Se queste sono in numero pari, cioè della forma $2k$, con $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$, rimangono $100 - 10k$ centesimi da rappresentare con monete da 2 e da 1 e ciò si può fare in $50 - 5k + 1$ modi, perchè le monete da 2 centesimi utilizzate possono essere un qualsiasi numero da 0 a $50 - 5k$.
Se invece le monete da 5 centesimi sono in numero dispari, cioè della forma $2k+1$, con $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$, rimangono $95 - 10k$ centesimi da rappresentare con monete da 2 e da 1 e ciò di può fare in $48 - 5k$ modi, perchè le monete da 2 centesimi utilizzate possono essere un qualsiasi numero da 0 a $47 - 5k$.
Per ottenere il numero totale di modi, bisogna quindi calcolare la somma S_1 di tutti i numeri del tipo $51 - 5k$, per k che varia da 0 a 10 e la somma di tutti i numeri del tipo $48 - 5k$, per k che varia da 0 a 9, sommando poi i due risultati ottenuti.
Abbiamo:

$$\begin{aligned} S_1 &= (51 - 5 \cdot 0) + (51 - 5 \cdot 1) + (51 - 5 \cdot 2) + \ldots + (51 - 5 \cdot 10) = \\ &= 11 \cdot 51 - 5 \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + 10) = \\ &= 561 - 5 \cdot 55 = 286 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_2 &= (48 - 5 \cdot 0) + (48 - 5 \cdot 1) + (48 - 5 \cdot 2) + \ldots + (48 - 5 \cdot 9) = \\ &= 10 \cdot 48 - 5 \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + 9) = \\ &= 480 - 5 \cdot 45 = 255 \end{aligned}$$

Quindi il numero totale di modi è $286 + 255$, cioè 541.

Soluzione del Quesito 17.

La risposta corretta è 24.
Innanzitutto, fattorizzando 576 otteniamo che:

$$576 = 2^6 \cdot 3^2.$$

I suoi divisori positivi, sono tutti e soli i numeri della forma $2^\alpha \cdot 3^\beta$, con $\alpha = 0, 1, \ldots, 6$ e $\beta = 0, 1, 2$.
Di conseguenza, visto che ci sono 7 valori possibili da dare ad α e 3 valori possibili da dare a β, i divisori sono in tutto $7 \cdot 3$, cioè 21.
Inoltre, poiché

$$576 = 2^6 \cdot 3^2 = \left(2^3 \cdot 3\right)^2 = 24^2,$$

possiamo concludere che 576 è un quadrato perfetto e tra i suoi divisori c'è anche la sua radice quadrata 24.
Ora, per comodità, conveniamo di chiamare *gemelli* due divisori di 576 tali che il loro prodotto sia 576. Ad esempio, 1 è gemello di 576, 2 è gemello di 288, 3 è gemello di 192, ecc.
Notiamo che la corrispondenza che associa ogni divisore al suo gemello, mette in corrispondenza biunivoca i divisori più piccoli di 24 (che è la radice di 576) con i divisori che sono più grandi di 24.
Ciò significa che i 21 divisori di 576, una volta tolto 24, sono raggruppabili in 10 coppie di divisori *gemelli*.
Ne segue che, poiché il prodotto dei divisori che stanno in ciascuna coppia è 576, il prodotto n di tutti i 21 divisori (compresa la radice 24) è dato da:

$$n = 576^{10} \cdot 24 = \left(24^2\right)^{10} \cdot 24 = 24^{21}.$$

Di conseguenza:

$$\sqrt[21]{n} = \sqrt[21]{24^{21}} = 24.$$

Soluzione del Quesito 18.

La risposta corretta è 1859.
Consideriamo la figura seguente:

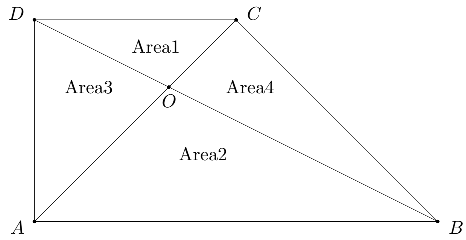

figura 5

Il triangolo ABD e il triangolo ABC hanno ovviamente la stessa area, perché hanno la stessa base e la stessa altezza, cioè abbiamo:

$$\text{Area3} + \text{Area2} = \text{Area4} + \text{Area2}$$

da cui, cancellando Area2 in ambo i membri, segue:

$$\text{Area3} = \text{Area4}.$$

Inoltre, poichè se due triangoli hanno la stessa altezza, il rapporto tra le loro aree è uguale a quello tra le loro basi, otteniamo le due proporzioni:

$$\text{Area1} : \text{Area4} = DO : OB$$

e

$$\text{Area3} : \text{Area2} = DO : OB$$

da cui segue:

$$\text{Area1} : \text{Area4} = \text{Area3} : \text{Area2}. \tag{1}$$

Di conseguenza, essendo Area3 = Area4, possiamo dire che l'area più grande è Area2 e quella più piccola è Area1.
Ciò significa che basterà trovare Area3 e Area4 che, essendo uguali, possiamo indicare entrambe con x.
Ci troviamo quindi nella situazione descritta nella figura seguente:

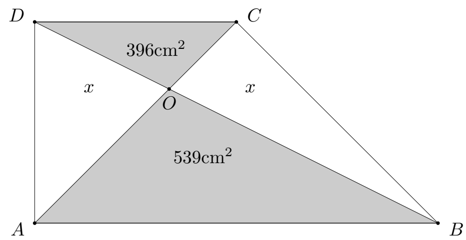

figura 6

La proporzione (1) diventa:

$$396 : x = x : 539$$

da cui segue $x = \sqrt{396 \cdot 539} = 462$ e quindi

$$\text{Area Totale} = 396 + 539 + 2 \cdot 462 = 1859.$$

In tutto questo si noti che non ha avuto alcuna importanza il fatto che il trapezio fosse rettangolo.

Soluzione del Quesito 19.

La risposta corretta è 198.
Per capire come funziona il gioco cominciamo ad analizzarlo a partire dalla fine.
Ovviamente la posizione finale persa è quella in cui non ci sono monete, mentre dalla posizione in cui ci sono 7 monete si riesce a vincere in una mossa.
Per visualizzare questo fatto tracciamo sulla retta dei numeri un pallino vuoto sulla posizione 0 e un pallino pieno sulla posizione 7, sotto il pallino pieno scriviamo 1, intendendo con ciò che da tale posizione si vince in una mossa.
Otteniamo la figura seguente:

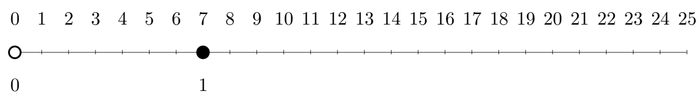

figura 7

Continuiamo la nostra analisi segnando le posizioni vinte con pallini pieni e quelle perse con pallini vuoti. Sotto ad ogni pallino ci segneremo un numero che indica in quante mosse si vince o si perde, giocando al meglio.
Otteniamo:

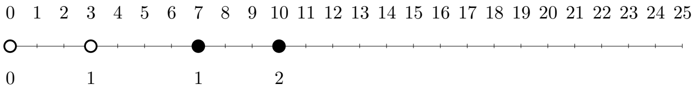

figura 8

Nella figura **8** il numero 1 sotto il pallino vuoto nella posizione 3 significa che si perde al più in una mossa, cioè che **qualunque mossa ammissibile si faccia**, si restituirà all'avversario una posizione con la quale si vince al più in una mossa. Il numero 2 sotto il pallino pieno nella posizione 10 significa che quella è una posizione dalla quale si vince in al più 2 mosse, cioè che **esiste una mossa ammissibile** che permette di restituire all'avversario una posizione a partire dalla quale si perde al più in una mossa.
Continuando la nostra analisi otteniamo:

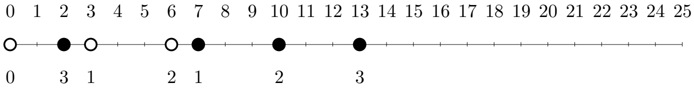

figura 9

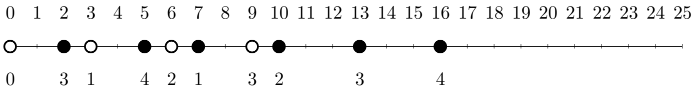

figura 10

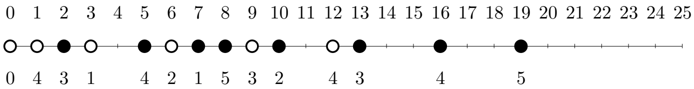

figura 11

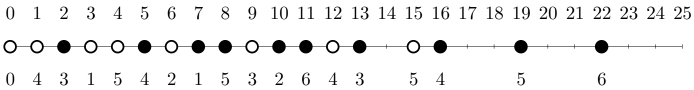

figura 12

A questo punto osserviamo che la parte terminale della configurazione di figura **11**, cioè quella dei numeri da 5 a 19, coincide con quella della figura **12**, a meno di una traslazione in avanti di 3 unità.
Ciò significa che da questo punto in poi la configurazione sarà periodica. In particolare si noti che da 5 compreso in poi, sui multipli di 3 finisce il pallino vuoto mentre sugli altri numeri finisce il pallino pieno, cioè le posizioni perse sono tutte e sole quelle corrispondenti ai multipli di 3.
Ciò significa che la pila di monete più alta possibile che Claudia può mettere sul tavolo per dare a Luca una situazione persa è quella con 198 monete.

Soluzione del Quesito 20.

La risposta corretta è 14.
Questo problema è un po' più difficile degli altri.
Oltre a vederne la soluzione cerchiamo quindi di capire anche come può venirci l'idea giusta.
Quello che ci viene chiesto è essenzialmente di scegliere una coppia di numeri minori di 1000 in modo che, operando successive riduzioni, si arrivi ad una coppia di tipo $(a, 0)$ compiendo più passi possibile.
Un modo per farsi un'idea di come operare è quello di partire dalla fine e provare ad andare a ritroso. Più precisamente, prendiamo la coppia $(1, 0)$, che è la *più piccola* coppia di tipo $(a, 0)$ e cerchiamo la coppia di numeri diversi più piccola possibile (in qualche senso) che ridotta mi dia $(0, 1)$.
Dopo un po' di tentativi probabilmente ci convinceremo che tale coppia è $(2, 1)$.
Ripetendo il tentativo scopriremo poi che la *minima* coppia riducendo la quale trovo $(2, 1)$ è $(2 + 1, 2)$, cioè $(3, 2)$.
Iterando il procedimento, siamo indotti a costruire la sequenza:

$$\ldots \to (p_{n+1}, p_n) \to (p_n, p_{n-1}) \to \ldots \to (8, 5) \to (5, 3) \to (3, 2) \to (2, 1) \to (1, 0)$$

dove la sequenza dei p_n è stata costruita usando la regola $p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$ partendo da $p_1 = 1$ e $p_2 = 2$. L'unica eccezione è l'ultima coppia che è $(p_1, 0)$.
Per come tale sequenza è stata costruita, abbiamo ovviamente che la riduzione di (p_{n+1}, p_n) è sempre (p_n, p_{n-1}), per cui il numero di riduzioni da operare sulla coppia (p_{n+1}, p_n) prima di fermarsi è esattamente n.
Un calcolo esplicito dei p_n mostra che $p_{14} = 610$, $p_{15} = 987$ e $p_{16} = 1597$, da cui segue che la più grande di tali coppie che ha entrambe le componenti inferiori a 1000 è (p_{15}, p_{14}), per la quale serve operare esattamente 14 riduzioni prima di fermarsi.
Per completare la soluzione del problema ci rimane da dimostrare che le coppie del tipo descritto sopra sono quelle che si *riducono più lentamente*.
Più precisamente dimostriamo che, per ogni intero $n \geq 3$, se a e b sono numeri interi tali che $0 < b < a < p_n$ allora sulla coppia (a, b) si possono operare al massimo $n - 2$ riduzioni. Da questo, ovviamente, segue che se a e b sono entrambi minori di p_{16}, cioè di 1597, allora sulla coppia (a, b) si possono operare al massimo 14 riduzioni, che è quanto ci basta per poter completare la soluzione del problema.
Dimostriamo quanto appena affermato per induzione.
La verifica che ciò vale per $n = 3$ e per $n = 4$ è immediata. Osserviamo poi che, nel caso l'affermazione valga per ogni n da 3 fino a k, allora vale anche per $n = k + 1$. Infatti, posto che sia $0 < b < a < p_{k+1}$, nel caso che sia $b < p_k$, la coppia che si ottiene riducendo (a, b) ha entrambi gli elementi minori di p_k e quindi ricade subito nell'ipotesi induttiva. Se invece $p_k \leq b < a < p_{k+1}$ allora $a - b < p_{k+1} - p_k = p_{k-1}$, per cui dopo due riduzioni si ottiene una coppia con entrambi gli elementi minori di p_{k-1}, da cui si può ancora concludere grazie all'ipotesi induttiva.
Possiamo quindi concludere, grazie al principio di induzione, che la nostra affermazione vale per ogni $n \geq 3$.