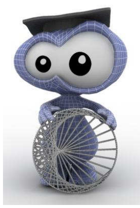
Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

Scuola Normale Superiore



T1

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2016

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere* **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** *: una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate.*

- *Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti, ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*

- *Per ciascuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

  Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
  Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ______________________ COGNOME ______________________________ classe: __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Una squadra di 16 persone partecipa ad un torneo sportivo. Il regolamento prevede che in campo siano presenti sempre 11 giocatori per squadra e che, nel corso di ogni partita (la cui durata è di 90 minuti) i 16 componenti di ogni squadra devono giocare tutti lo stesso numero di minuti. Per quanti minuti sarà in campo ciascun giocatore durante la partita?
   (A) meno di 57 **(B)** tra 57 e 60 **(C)** tra 60 e 63 **(D)** tra 63 e 66 **(E)** più di 66

2. Quattro amici si sono stancati dei loro portachiavi e decidono di ridistribuirseli, in modo tale che ciascuno di loro ne abbia uno differente da quello che aveva prima. In quanti modi diversi possono scambiarsi i portachiavi?
   (A) 9 **(B)** 11 **(C)** 7 **(D)** 10 **(E)** 8

3. Il prodotto di due numeri naturali è 600000. Quale può essere, al massimo, il loro Massimo Comune Divisore?
   (A) 100 **(B)** 3000 **(C)** 1 **(D)** 200 **(E)** 600

4. Alberto, Barbara, Carlo e Daria partecipano a un gioco. All'inizio, con un sorteggio, ad ognuno viene assegnato un numero: ad Alberto $2^{101}+2^{121}+2^{180}$, a Barbara $2^{100}+2^{202}+2^{400}$, a Carlo $2^{101}+2^{109}$, a Daria $2^{100}+2^{108}$. Poi si svolgono vari turni: in ogni turno, ciascun giocatore dimezza il proprio numero (se esso è pari), oppure esce dal gioco (se è dispari). Vince chi esce per ultimo dal gioco (può darsi che più giocatori vincano ex aequo). Chi vincerà la sfida?
   (A) solo Alberto **(B)** Alberto e Carlo **(C)** solo Barbara
   (D) Carlo e Daria **(E)** Barbara e Daria

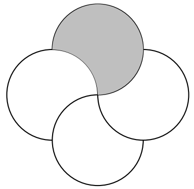
5. Sei persone (due con una maglia rossa, due con una maglia azzurra, due con una maglia gialla), per giocare a briscola, vogliono suddividersi in tre squadre di due persone ciascuna. In quanti modi possono effettuare la suddivisione, facendo sì che i due di ciascuna squadra abbiano maglie di colori differenti?
   (A) 24 **(B)** 8 **(C)** 11 **(D)** 4 **(E)** 15

6. Ogni anno si svolge la gara a squadre delle Olimpiadi di Grammatica. Una regola impone che ciascuna squadra sia formata da tanti membri quante sono le squadre partecipanti quell'anno. Inoltre, si è notato che ogni anno il numero di squadre partecipanti aumenta esattamente di 1. Indicando con x il numero complessivo di persone partecipanti alla gara del 2016 e con y il numero di persone partecipanti alla gara del 2000, cosa si può affermare con sicurezza riguardo al valore di $x-y$?
   (A) che è divisibile per 32 **(B)** che è un quadrato perfetto
   (C) che è un numero primo **(D)** che è divisible per 101 **(E)** che è dispari

7. Ad un torneo di calcio partecipano solo 4 squadre, chiamate A, B, C, D. Ad ogni giornata, ciascuna squadra gioca una partita e, nel corso del torneo, ciascuna squadra incontra ogni altra precisamente una volta. Dopo le prime due giornate, la squadra A ha subito 1 rete e ne ha segnate 3, la squadra B ha segnato 4 reti senza subirne, la squadra C ha segnato 1 rete senza subirne, la squadra D ha subito 7 reti senza segnarne. Tenendo conto che si guadagnano 3 punti per ogni vittoria, 1 punto per ogni pareggio e nessun punto in caso di sconfitta, indicare quanti punti hanno realizzato, rispettivamente, le squadre A, B, C, D (in questo ordine) nelle prime due giornate.
   (A) $4,6,1,0$ **(B)** $4,4,2,0$ **(C)** $4,3,2,1$ **(D)** $1,6,4,0$ **(E)** $3,4,4,0$

8. Un motorino e una bicicletta percorrono un grande tracciato di forma quadrata, partendo nello stesso istante da uno dei vertici e procedendo ambedue in senso orario. Il lato del tracciato misura 90 km. Il motorino viaggia alla velocità costante di 65 km orari, la bicicletta a 30 km orari. Dopo quante ore i due si incontreranno di nuovo in uno dei quattro vertici del tracciato?
   (A) 7 **(B)** 72/7 **(C)** 30/7 **(D)** 72 **(E)** non accadrà mai più

9. La figura qui a lato è formata da 4 archi tra loro congruenti di circonferenze aventi raggio 1. Qual è l'area della regione ombreggiata?
(A) $3-\pi/4$ **(B)** $1+\pi/2$ **(C)** $\pi-1/2$
(D) $2+\pi/4$ **(E)** $4-\pi/2$



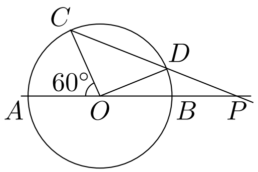
10. Romeo è libero dal lavoro tutte le domeniche (e nessun altro giorno). Giulietta lavora su una nave da crociera: rimane in mare per 10 giorni, poi ha due giorni liberi prima di imbarcarsi di nuovo per altri 10 giorni, e così via. Oggi, mercoledì 23 novembre 2016, Giulietta è a terra e s'imbarcherà domani. Quante giornate potranno trascorrere insieme Romeo e Giulietta fino al 23 novembre 2017?
(A) 9 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 7 **(E)** 5

11. Qual è il più grande fattore primo di $3^{12}-1$?
(A) 73 **(B)** 3^6+1 **(C)** 107 **(D)** 13 **(E)** 949

12. Si lanciano due dadi da gioco di colore rosso e un dado azzurro. Qual è la probabilità che la somma dei punteggi dei dadi rossi sia uguale al punteggio del dado azzurro?
(A) 1/12 **(B)** 2/27 **(C)** 1/15 **(D)** 1/18 **(E)** 5/72

13. Quale tra questi numeri è il più piccolo?
(A) $\frac{\sqrt{2018}}{2017}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2016}}{2015}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2019}}{2018}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2017}}{2016}$ **(E)** $\frac{\sqrt{2020}}{2019}$

14. Data un circonferenza γ avente centro O e diametro AB lungo 12 cm, sia C un punto di γ tale che $A\widehat{O}C=60°$, e sia P un punto sul prolungamento del diametro AB, dalla parte di B, tale che $OD=DP$ (dove D è il punto d'intersezione tra PC e γ compreso tra C e P). Qual è l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{P}C$?
(A) 15° **(B)** $\frac{45°}{2}$ **(C)** 20° **(D)** 18° **(E)** 24°



15. Osservando il calendario, Chiara si è accorta che l'anno corrente 2016 ha una particolarità: posto $x=2016$ il numero dell'anno, allora $x+1$ è multiplo di 1, $x+2$ è multiplo di 2, $x+3$ è multiplo di 3 e $x+4$ è multiplo di 4, ma $x+5$ non è multiplo di 5. Quanti altri numeri interi positivi, minori di 2016, hanno la stessa particolarità?
(A) 141 **(B)** 83 **(C)** 167 **(D)** 134 **(E)** 149

16. Dato un triangolo EFG, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza ad esso circoscritta. Indichiamo con X il punto d'intersezione (diverso da F) della bisettrice dell'angolo $E\widehat{F}G$ con la circonferenza $\mathcal{C}$ e con Y il punto medio dell'arco $\widehat{EG}$ contenente F. Sapendo che $\overline{FX}=12$ e $\overline{FY}=5$, quanto misura il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$?
(A) 9 **(B)** 13/2 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 11/2

17. Le misure dei lati di un triangolo ABC sono: $\overline{AC}=\overline{BC}=10$ cm, $\overline{AB}=12$ cm. Quanti cm misura la parte di perimetro di ABC formata dai punti per i quali la distanza da A è minore della distanza da C?
(A) 27/2 **(B)** 16 **(C)** 12 **(D)** 25/2 **(E)** 40/3

18. Una pulce si trova inizialmente nell'origine del piano cartesiano e può spostarsi sui punti a coordinate intere scegliendo di volta in volta una di queste tre mosse:

- dal punto (x,y) salta al punto $(x,y+5)$;
- dal punto (x,y) salta al punto $(x-2,y-3)$;
- dal punto (x,y) salta al punto $(x+4,y-9)$.

Quanti sono i percorsi, realizzabili dalla pulce con le sue mosse, che la portano dall'origine $(0,0)$ al punto $(0,2016)$?
(A) nessuno **(B)** precisamente 1 **(C)** un numero compreso tra 5 e 20
(D) un numero compreso tra 20 e 100 **(E)** infiniti

19. Del quadrilatero convesso $ABCD$ si conoscono le misure dei lati AB, BC, CD e DA, che sono, nell'ordine, 4, 9, 6 e 11 cm. Indicati con E e F i punti medi dei lati AB e CD, si sa inoltre che l'area del quadrilatero $BEDF$ è di 18 cm^2. Di quanti cm^2 è l'area del quadrilatero $ABCD$?
(A) 27 **(B)** 36 **(C)** 24 **(D)** più di 50 **(E)** un valore tra 40 e 50

20. Dati dei numeri interi n e k, con $1\leq k\leq n$, definiamo un polinomio, di grado $n-1$, nel modo seguente:

$$p(x)=\frac{(x+1)(x+2)...(x+n)}{(x+k)}.$$

Ad esempio, se fosse $n=5$ e $k=2$, si avrebbe $p(x)=(x+1)(x+3)(x+4)(x+5)$. Supponiamo che, per una certa scelta di n e k, il coefficiente di x^{n-2} nel polinomio $p(x)$ sia uguale a 67. Qual è, in tal caso, il valore di n?
(A) 68 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 11 **(E)** 69

Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

Scuola Normale Superiore

T2

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2016

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere* **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** *: una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate.*
- *Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti, ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
- *Per ciascuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ______________________ COGNOME ______________________________ classe: __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Quattro amici si sono stancati dei loro portachiavi e decidono di ridistribuirseli, in modo tale che ciascuno di loro ne abbia uno differente da quello che aveva prima. In quanti modi diversi possono scambiarsi i portachiavi?
(A) 9 **(B)** 11 **(C)** 7 **(D)** 10 **(E)** 8

2. Alberto, Barbara, Carlo e Daria partecipano a un gioco. All'inizio, con un sorteggio, ad ognuno viene assegnato un numero: ad Alberto $2^{101} + 2^{121} + 2^{180}$, a Barbara $2^{100} + 2^{202} + 2^{400}$, a Carlo $2^{101} + 2^{109}$, a Daria $2^{100} + 2^{108}$. Poi si svolgono vari turni: in ogni turno, ciascun giocatore dimezza il proprio numero (se esso è pari), oppure esce dal gioco (se è dispari). Vince chi esce per ultimo dal gioco (può darsi che più giocatori vincano ex aequo). Chi vincerà la sfida?
(A) solo Alberto **(B)** Alberto e Carlo **(C)** solo Barbara
(D) Carlo e Daria **(E)** Barbara e Daria

3. Il prodotto di due numeri naturali è 600000. Quale può essere, al massimo, il loro Massimo Comune Divisore?
(A) 100 **(B)** 3000 **(C)** 1 **(D)** 200 **(E)** 600

4. Una squadra di 16 persone partecipa ad un torneo sportivo. Il regolamento prevede che in campo siano presenti sempre 11 giocatori per squadra e che, nel corso di ogni partita (la cui durata è di 90 minuti) i 16 componenti di ogni squadra devono giocare tutti lo stesso numero di minuti. Per quanti minuti sarà in campo ciascun giocatore durante la partita?
(A) meno di 57 **(B)** tra 57 e 60 **(C)** tra 60 e 63 **(D)** tra 63 e 66 **(E)** più di 66

5. Ogni anno si svolge la gara a squadre delle Olimpiadi di Grammatica. Una regola impone che ciascuna squadra sia formata da tanti membri quante sono le squadre partecipanti quell'anno. Inoltre, si è notato che ogni anno il numero di squadre partecipanti aumenta esattamente di 1. Indicando con x il numero complessivo di persone partecipanti alla gara del 2016 e con y il numero di persone partecipanti alla gara del 2000, cosa si può affermare con sicurezza riguardo al valore di $x - y$?
(A) che è divisibile per 32 **(B)** che è un quadrato perfetto
(C) che è un numero primo **(D)** che è divisible per 101 **(E)** che è dispari

6. Ad un torneo di calcio partecipano solo 4 squadre, chiamate A, B, C, D. Ad ogni giornata, ciascuna squadra gioca una partita e, nel corso del torneo, ciascuna squadra incontra ogni altra precisamente una volta. Dopo le prime due giornate, la squadra A ha subito 1 rete e ne ha segnate 3, la squadra B ha segnato 4 reti senza subirne, la squadra C ha segnato 1 rete senza subirne, la squadra D ha subito 7 reti senza segnarne. Tenendo conto che si guadagnano 3 punti per ogni vittoria, 1 punto per ogni pareggio e nessun punto in caso di sconfitta, indicare quanti punti hanno realizzato, rispettivamente, le squadre A, B, C, D (in questo ordine) nelle prime due giornate.
(A) $4, 6, 1, 0$ **(B)** $4, 4, 2, 0$ **(C)** $4, 3, 2, 1$ **(D)** $1, 6, 4, 0$ **(E)** $3, 4, 4, 0$

7. Un motorino e una bicicletta percorrono un grande tracciato di forma quadrata, partendo nello stesso istante da uno dei vertici e procedendo ambedue in senso orario. Il lato del tracciato misura 90 km. Il motorino viaggia alla velocità costante di 65 km orari, la bicicletta a 30 km orari. Dopo quante ore i due si incontreranno di nuovo in uno dei quattro vertici del tracciato?
(A) 7 **(B)** 72/7 **(C)** 30/7 **(D)** 72 **(E)** non accadrà mai più

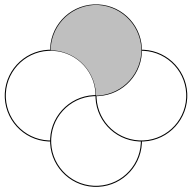
8. Sei persone (due con una maglia rossa, due con una maglia azzurra, due con una maglia gialla), per giocare a briscola, vogliono suddividersi in tre squadre di due persone ciascuna. In quanti modi possono effettuare la suddivisione, facendo sì che i due di ciascuna squadra abbiano maglie di colori differenti?
(A) 24 **(B)** 8 **(C)** 11 **(D)** 4 **(E)** 15

9. Si lanciano due dadi da gioco di colore rosso e un dado azzurro. Qual è la probabilità che la somma dei punteggi dei dadi rossi sia uguale al punteggio del dado azzurro?
(A) 1/12 **(B)** 2/27 **(C)** 1/15 **(D)** 1/18 **(E)** 5/72

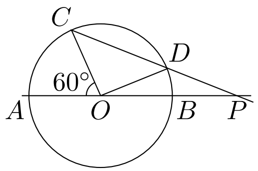
10. Qual è il più grande fattore primo di $3^{12} - 1$?
(A) 73 **(B)** $3^6 + 1$ **(C)** 107 **(D)** 13 **(E)** 949

11. Romeo è libero dal lavoro tutte le domeniche (e nessun altro giorno). Giulietta lavora su una nave da crociera: rimane in mare per 10 giorni, poi ha due giorni liberi prima di imbarcarsi di nuovo per altri 10 giorni, e così via. Oggi, mercoledì 23 novembre 2016, Giulietta è a terra e s'imbarcherà domani. Quante giornate potranno trascorrere insieme Romeo e Giulietta fino al 23 novembre 2017?
(A) 9 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 7 **(E)** 5

12. La figura qui a lato è formata da 4 archi tra loro congruenti di circonferenze aventi raggio 1. Qual è l'area della regione ombreggiata?
(A) $3 - \pi/4$ **(B)** $1 + \pi/2$ **(C)** $\pi - 1/2$
(D) $2 + \pi/4$ **(E)** $4 - \pi/2$



13. Data un circonferenza γ avente centro O e diametro AB lungo 12 cm, sia C un punto di γ tale che $A\widehat{O}C = 60°$, e sia P un punto sul prolungamento del diametro AB, dalla parte di B, tale che $OD = DP$ (dove D è il punto d'intersezione tra PC e γ compreso tra C e P). Qual è l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{P}C$?
(A) 15° **(B)** $\frac{45°}{2}$ **(C)** 20° **(D)** 18° **(E)** 24°



14. Quale tra questi numeri è il più piccolo?
(A) $\frac{\sqrt{2018}}{2017}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2016}}{2015}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2019}}{2018}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2017}}{2016}$ **(E)** $\frac{\sqrt{2020}}{2019}$

15. Dato un triangolo EFG, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza ad esso circoscritta. Indichiamo con X il punto d'intersezione (diverso da F) della bisettrice dell'angolo $E\widehat{F}G$ con la circonferenza $\mathcal{C}$ e con Y il punto medio dell'arco $\widehat{EG}$ contenente F. Sapendo che $\overline{FX} = 12$ e $\overline{FY} = 5$, quanto misura il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$?
(A) 9 **(B)** 13/2 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 11/2

16. Osservando il calendario, Chiara si è accorta che l'anno corrente 2016 ha una particolarità: posto $x = 2016$ il numero dell'anno, allora $x + 1$ è multiplo di 1, $x + 2$ è multiplo di 2, $x + 3$ è multiplo di 3 e $x + 4$ è multiplo di 4, ma $x + 5$ non è multiplo di 5. Quanti altri numeri interi positivi, minori di 2016, hanno la stessa particolarità?
(A) 141 **(B)** 83 **(C)** 167 **(D)** 134 **(E)** 149

17. Dati dei numeri interi n e k, con $1 \leq k \leq n$, definiamo un polinomio, di grado $n - 1$, nel modo seguente:

$$p(x) = \frac{(x+1)(x+2)...(x+n)}{(x+k)}.$$

Ad esempio, se fosse $n = 5$ e $k = 2$, si avrebbe $p(x) = (x + 1)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$. Supponiamo che, per una certa scelta di n e k, il coefficiente di x^{n-2} nel polinomio $p(x)$ sia uguale a 67. Qual è, in tal caso, il valore di n?
(A) 68 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 11 **(E)** 69

18. Del quadrilatero convesso $ABCD$ si conoscono le misure dei lati AB, BC, CD e DA, che sono, nell'ordine, 4, 9, 6 e 11 cm. Indicati con E e F i punti medi dei lati AB e CD, si sa inoltre che l'area del quadrilatero $BEDF$ è di 18 cm^2. Di quanti cm^2 è l'area del quadrilatero $ABCD$?
(A) 27 **(B)** 36 **(C)** 24 **(D)** più di 50 **(E)** un valore tra 40 e 50

19. Una pulce si trova inizialmente nell'origine del piano cartesiano e può spostarsi sui punti a coordinate intere scegliendo di volta in volta una di queste tre mosse:

- dal punto (x, y) salta al punto $(x, y + 5)$;
- dal punto (x, y) salta al punto $(x - 2, y - 3)$;
- dal punto (x, y) salta al punto $(x + 4, y - 9)$.

Quanti sono i percorsi, realizzabili dalla pulce con le sue mosse, che la portano dall'origine $(0, 0)$ al punto $(0, 2016)$?
(A) nessuno **(B)** precisamente 1 **(C)** un numero compreso tra 5 e 20
(D) un numero compreso tra 20 e 100 **(E)** infiniti

20. Le misure dei lati di un triangolo ABC sono: $\overline{AC} = \overline{BC} = 10$ cm, $\overline{AB} = 12$ cm. Quanti cm misura la parte di perimetro di ABC formata dai punti per i quali la distanza da A è minore della distanza da C?
(A) 27/2 **(B)** 16 **(C)** 12 **(D)** 25/2 **(E)** 40/3

Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

Scuola Normale Superiore

T3

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2016

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere* **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** *: una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate.*
- *Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti, ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
- *Per ciascuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ______________________ COGNOME ______________________________ classe: __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Il prodotto di due numeri naturali è 600000. Quale può essere, al massimo, il loro Massimo Comune Divisore?
(A) 100 **(B)** 3000 **(C)** 1 **(D)** 200 **(E)** 600

2. Quattro amici si sono stancati dei loro portachiavi e decidono di ridistribuirseli, in modo tale che ciascuno di loro ne abbia uno differente da quello che aveva prima. In quanti modi diversi possono scambiarsi i portachiavi?
(A) 9 **(B)** 11 **(C)** 7 **(D)** 10 **(E)** 8

3. Una squadra di 16 persone partecipa ad un torneo sportivo. Il regolamento prevede che in campo siano presenti sempre 11 giocatori per squadra e che, nel corso di ogni partita (la cui durata è di 90 minuti) i 16 componenti di ogni squadra devono giocare tutti lo stesso numero di minuti. Per quanti minuti sarà in campo ciascun giocatore durante la partita?
(A) meno di 57 **(B)** tra 57 e 60 **(C)** tra 60 e 63 **(D)** tra 63 e 66 **(E)** più di 66

4. Alberto, Barbara, Carlo e Daria partecipano a un gioco. All'inizio, con un sorteggio, ad ognuno viene assegnato un numero: ad Alberto $2^{101} + 2^{121} + 2^{180}$, a Barbara $2^{100} + 2^{202} + 2^{400}$, a Carlo $2^{101} + 2^{109}$, a Daria $2^{100} + 2^{108}$. Poi si svolgono vari turni: in ogni turno, ciascun giocatore dimezza il proprio numero (se esso è pari), oppure esce dal gioco (se è dispari). Vince chi esce per ultimo dal gioco (può darsi che più giocatori vincano ex aequo). Chi vincerà la sfida?
(A) solo Alberto **(B)** Alberto e Carlo **(C)** solo Barbara
(D) Carlo e Daria **(E)** Barbara e Daria

5. Ad un torneo di calcio partecipano solo 4 squadre, chiamate A, B, C, D. Ad ogni giornata, ciascuna squadra gioca una partita e, nel corso del torneo, ciascuna squadra incontra ogni altra precisamente una volta. Dopo le prime due giornate, la squadra A ha subito 1 rete e ne ha segnate 3, la squadra B ha segnato 4 reti senza subirne, la squadra C ha segnato 1 rete senza subirne, la squadra D ha subito 7 reti senza segnarne. Tenendo conto che si guadagnano 3 punti per ogni vittoria, 1 punto per ogni pareggio e nessun punto in caso di sconfitta, indicare quanti punti hanno realizzato, rispettivamente, le squadre A, B, C, D (in questo ordine) nelle prime due giornate.
(A) $4, 6, 1, 0$ **(B)** $4, 4, 2, 0$ **(C)** $4, 3, 2, 1$ **(D)** $1, 6, 4, 0$ **(E)** $3, 4, 4, 0$

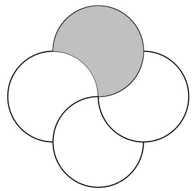
6. Un motorino e una bicicletta percorrono un grande tracciato di forma quadrata, partendo nello stesso istante da uno dei vertici e procedendo ambedue in senso orario. Il lato del tracciato misura 90 km. Il motorino viaggia alla velocità costante di 65 km orari, la bicicletta a 30 km orari. Dopo quante ore i due si incontreranno di nuovo in uno dei quattro vertici del tracciato?
(A) 7 **(B)** 72/7 **(C)** 30/7 **(D)** 72 **(E)** non accadrà mai più

7. Ogni anno si svolge la gara a squadre delle Olimpiadi di Grammatica. Una regola impone che ciascuna squadra sia formata da tanti membri quante sono le squadre partecipanti quell'anno. Inoltre, si è notato che ogni anno il numero di squadre partecipanti aumenta esattamente di 1. Indicando con x il numero complessivo di persone partecipanti alla gara del 2016 e con y il numero di persone partecipanti alla gara del 2000, cosa si può affermare con sicurezza riguardo al valore di $x - y$?
(A) che è divisibile per 32 **(B)** che è un quadrato perfetto
(C) che è un numero primo **(D)** che è divisible per 101 **(E)** che è dispari

8. Sei persone (due con una maglia rossa, due con una maglia azzurra, due con una maglia gialla), per giocare a briscola, vogliono suddividersi in tre squadre di due persone ciascuna. In quanti modi possono effettuare la suddivisione, facendo sì che i due di ciascuna squadra abbiano maglie di colori differenti?
(A) 24 **(B)** 8 **(C)** 11 **(D)** 4 **(E)** 15

9. Romeo è libero dal lavoro tutte le domeniche (e nessun altro giorno). Giulietta lavora su una nave da crociera: rimane in mare per 10 giorni, poi ha due giorni liberi prima di imbarcarsi di nuovo per altri 10 giorni, e così via. Oggi, mercoledì 23 novembre 2016, Giulietta è a terra e s'imbarcherà domani. Quante giornate potranno trascorrere insieme Romeo e Giulietta fino al 23 novembre 2017?
(A) 9 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 7 **(E)** 5

10. La figura qui a lato è formata da 4 archi tra loro congruenti di circonferenze aventi raggio 1. Qual è l'area della regione ombreggiata?
(A) $3-\pi/4$ **(B)** $1+\pi/2$ **(C)** $\pi-1/2$
(D) $2+\pi/4$ **(E)** $4-\pi/2$

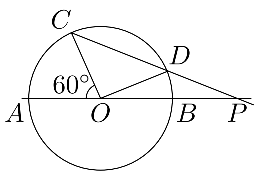


11. Si lanciano due dadi da gioco di colore rosso e un dado azzurro. Qual è la probabilità che la somma dei punteggi dei dadi rossi sia uguale al punteggio del dado azzurro?
(A) $1/12$ **(B)** $2/27$ **(C)** $1/15$ **(D)** $1/18$ **(E)** $5/72$

12. Qual è il più grande fattore primo di $3^{12}-1$?
(A) 73 **(B)** 3^6+1 **(C)** 107 **(D)** 13 **(E)** 949

13. Osservando il calendario, Chiara si è accorta che l'anno corrente 2016 ha una particolarità: posto $x = 2016$ il numero dell'anno, allora $x+1$ è multiplo di 1, $x+2$ è multiplo di 2, $x+3$ è multiplo di 3 e $x+4$ è multiplo di 4, ma $x+5$ non è multiplo di 5. Quanti altri numeri interi positivi, minori di 2016, hanno la stessa particolarità?
(A) 141 **(B)** 83 **(C)** 167 **(D)** 134 **(E)** 149

14. Data un circonferenza γ avente centro O e diametro AB lungo 12 cm, sia C un punto di γ tale che $A\widehat{O}C = 60°$, e sia P un punto sul prolungamento del diametro AB, dalla parte di B, tale che $OD = DP$ (dove D è il punto d'intersezione tra PC e γ compreso tra C e P). Qual è l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{P}C$?
(A) $15°$ **(B)** $\frac{45°}{2}$ **(C)** $20°$ **(D)** $18°$ **(E)** $24°$



15. Quale tra questi numeri è il più piccolo?
(A) $\frac{\sqrt{2018}}{2017}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2016}}{2015}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2019}}{2018}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2017}}{2016}$ **(E)** $\frac{\sqrt{2020}}{2019}$

16. Dato un triangolo EFG, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza ad esso circoscritta. Indichiamo con X il punto d'intersezione (diverso da F) della bisettrice dell'angolo $E\widehat{F}G$ con la circonferenza $\mathcal{C}$ e con Y il punto medio dell'arco $\widehat{EG}$ contenente F. Sapendo che $\overline{FX} = 12$ e $\overline{FY} = 5$, quanto misura il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$?
(A) 9 **(B)** $13/2$ **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** $11/2$

17. Una pulce si trova inizialmente nell'origine del piano cartesiano e può spostarsi sui punti a coordinate intere scegliendo di volta in volta una di queste tre mosse:

- dal punto (x, y) salta al punto $(x, y+5)$;
- dal punto (x, y) salta al punto $(x-2, y-3)$;
- dal punto (x, y) salta al punto $(x+4, y-9)$.

Quanti sono i percorsi, realizzabili dalla pulce con le sue mosse, che la portano dall'origine $(0, 0)$ al punto $(0, 2016)$?
(A) nessuno **(B)** precisamente 1 **(C)** un numero compreso tra 5 e 20
(D) un numero compreso tra 20 e 100 **(E)** infiniti

18. Le misure dei lati di un triangolo ABC sono: $\overline{AC} = \overline{BC} = 10$ cm, $\overline{AB} = 12$ cm. Quanti cm misura la parte di perimetro di ABC formata dai punti per i quali la distanza da A è minore della distanza da C?
(A) $27/2$ **(B)** 16 **(C)** 12 **(D)** $25/2$ **(E)** $40/3$

19. Dati dei numeri interi n e k, con $1 \le k \le n$, definiamo un polinomio, di grado $n-1$, nel modo seguente:

$$p(x) = \frac{(x+1)(x+2)...(x+n)}{(x+k)}.$$

Ad esempio, se fosse $n = 5$ e $k = 2$, si avrebbe $p(x) = (x+1)(x+3)(x+4)(x+5)$. Supponiamo che, per una certa scelta di n e k, il coefficiente di x^{n-2} nel polinomio $p(x)$ sia uguale a 67. Qual è, in tal caso, il valore di n?
(A) 68 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 11 **(E)** 69

20. Del quadrilatero convesso $ABCD$ si conoscono le misure dei lati AB, BC, CD e DA, che sono, nell'ordine, 4, 9, 6 e 11 cm. Indicati con E e F i punti medi dei lati AB e CD, si sa inoltre che l'area del quadrilatero $BEDF$ è di 18 cm^2. Di quanti cm^2 è l'area del quadrilatero $ABCD$?
(A) 27 **(B)** 36 **(C)** 24 **(D)** più di 50 **(E)** un valore tra 40 e 50

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

T4

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2016

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere* **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** *: una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate.*
- *Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti, ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
- *Per ciascuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ____________________ COGNOME ____________________________ classe: __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Alberto, Barbara, Carlo e Daria partecipano a un gioco. All'inizio, con un sorteggio, ad ognuno viene assegnato un numero: ad Alberto $2^{101} + 2^{121} + 2^{180}$, a Barbara $2^{100} + 2^{202} + 2^{400}$, a Carlo $2^{101} + 2^{109}$, a Daria $2^{100} + 2^{108}$. Poi si svolgono vari turni: in ogni turno, ciascun giocatore dimezza il proprio numero (se esso è pari), oppure esce dal gioco (se è dispari). Vince chi esce per ultimo dal gioco (può darsi che più giocatori vincano ex aequo). Chi vincerà la sfida?
   (A) solo Alberto **(B)** Alberto e Carlo **(C)** solo Barbara
   (D) Carlo e Daria **(E)** Barbara e Daria

2. Il prodotto di due numeri naturali è 600000. Quale può essere, al massimo, il loro Massimo Comune Divisore?
   (A) 100 **(B)** 3000 **(C)** 1 **(D)** 200 **(E)** 600

3. Quattro amici si sono stancati dei loro portachiavi e decidono di ridistribuirseli, in modo tale che ciascuno di loro ne abbia uno differente da quello che aveva prima. In quanti modi diversi possono scambiarsi i portachiavi?
   (A) 9 **(B)** 11 **(C)** 7 **(D)** 10 **(E)** 8

4. Una squadra di 16 persone partecipa ad un torneo sportivo. Il regolamento prevede che in campo siano presenti sempre 11 giocatori per squadra e che, nel corso di ogni partita (la cui durata è di 90 minuti) i 16 componenti di ogni squadra devono giocare tutti lo stesso numero di minuti. Per quanti minuti sarà in campo ciascun giocatore durante la partita?
   (A) meno di 57 **(B)** tra 57 e 60 **(C)** tra 60 e 63 **(D)** tra 63 e 66 **(E)** più di 66

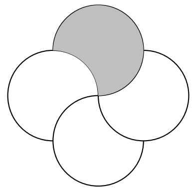
5. Ogni anno si svolge la gara a squadre delle Olimpiadi di Grammatica. Una regola impone che ciascuna squadra sia formata da tanti membri quante sono le squadre partecipanti quell'anno. Inoltre, si è notato che ogni anno il numero di squadre partecipanti aumenta esattamente di 1. Indicando con x il numero complessivo di persone partecipanti alla gara del 2016 e con y il numero di persone partecipanti alla gara del 2000, cosa si può affermare con sicurezza riguardo al valore di $x - y$?
   (A) che è divisibile per 32 **(B)** che è un quadrato perfetto
   (C) che è un numero primo **(D)** che è divisible per 101 **(E)** che è dispari

6. Sei persone (due con una maglia rossa, due con una maglia azzurra, due con una maglia gialla), per giocare a briscola, vogliono suddividersi in tre squadre di due persone ciascuna. In quanti modi possono effettuare la suddivisione, facendo sì che i due di ciascuna squadra abbiano maglie di colori differenti?
   (A) 24 **(B)** 8 **(C)** 11 **(D)** 4 **(E)** 15

7. Un motorino e una bicicletta percorrono un grande tracciato di forma quadrata, partendo nello stesso istante da uno dei vertici e procedendo ambedue in senso orario. Il lato del tracciato misura 90 km. Il motorino viaggia alla velocità costante di 65 km orari, la bicicletta a 30 km orari. Dopo quante ore i due si incontreranno di nuovo in uno dei quattro vertici del tracciato?
   (A) 7 **(B)** 72/7 **(C)** 30/7 **(D)** 72 **(E)** non accadrà mai più

8. Ad un torneo di calcio partecipano solo 4 squadre, chiamate A, B, C, D. Ad ogni giornata, ciascuna squadra gioca una partita e, nel corso del torneo, ciascuna squadra incontra ogni altra precisamente una volta. Dopo le prime due giornate, la squadra A ha subito 1 rete e ne ha segnate 3, la squadra B ha segnato 4 reti senza subirne, la squadra C ha segnato 1 rete senza subirne, la squadra D ha subito 7 reti senza segnarne. Tenendo conto che si guadagnano 3 punti per ogni vittoria, 1 punto per ogni pareggio e nessun punto in caso di sconfitta, indicare quanti punti hanno realizzato, rispettivamente, le squadre A, B, C, D (in questo ordine) nelle prime due giornate.
   (A) 4, 6, 1, 0 **(B)** 4, 4, 2, 0 **(C)** 4, 3, 2, 1 **(D)** 1, 6, 4, 0 **(E)** 3, 4, 4, 0

9. La figura qui a lato è formata da 4 archi tra loro congruenti di circonferenze aventi raggio 1. Qual è l'area della regione ombreggiata?



(A) $3 - \pi/4$ **(B)** $1 + \pi/2$ **(C)** $\pi - 1/2$
(D) $2 + \pi/4$ **(E)** $4 - \pi/2$

10. Si lanciano due dadi da gioco di colore rosso e un dado azzurro. Qual è la probabilità che la somma dei punteggi dei dadi rossi sia uguale al punteggio del dado azzurro?
(A) 1/12 **(B)** 2/27 **(C)** 1/15 **(D)** 1/18 **(E)** 5/72

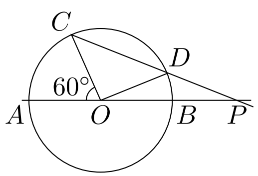
11. Qual è il più grande fattore primo di $3^{12} - 1$?
(A) 73 **(B)** $3^6 + 1$ **(C)** 107 **(D)** 13 **(E)** 949

12. Romeo è libero dal lavoro tutte le domeniche (e nessun altro giorno). Giulietta lavora su una nave da crociera: rimane in mare per 10 giorni, poi ha due giorni liberi prima di imbarcarsi di nuovo per altri 10 giorni, e così via. Oggi, mercoledì 23 novembre 2016, Giulietta è a terra e s'imbarcherà domani. Quante giornate potranno trascorrere insieme Romeo e Giulietta fino al 23 novembre 2017?
(A) 9 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 7 **(E)** 5

13. Dato un triangolo EFG, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza ad esso circoscritta. Indichiamo con X il punto d'intersezione (diverso da F) della bisettrice dell'angolo $E\widehat{F}G$ con la circonferenza $\mathcal{C}$ e con Y il punto medio dell'arco $\widehat{EG}$ contenente F. Sapendo che $\overline{FX} = 12$ e $\overline{FY} = 5$, quanto misura il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$?
(A) 9 **(B)** 13/2 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 11/2

14. Osservando il calendario, Chiara si è accorta che l'anno corrente 2016 ha una particolarità: posto $x = 2016$ il numero dell'anno, allora $x + 1$ è multiplo di 1, $x + 2$ è multiplo di 2, $x + 3$ è multiplo di 3 e $x + 4$ è multiplo di 4, ma $x + 5$ non è multiplo di 5. Quanti altri numeri interi positivi, minori di 2016, hanno la stessa particolarità?
(A) 141 **(B)** 83 **(C)** 167 **(D)** 134 **(E)** 149

15. Data un circonferenza γ avente centro O e diametro AB lungo 12 cm, sia C un punto di γ tale che $A\widehat{O}C = 60°$, e sia P un punto sul prolungamento del diametro AB, dalla parte di B, tale che $OD = DP$ (dove D è il punto d'intersezione tra PC e γ compreso tra C e P). Qual è l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{P}C$?



(A) 15° **(B)** $\frac{45°}{2}$ **(C)** 20° **(D)** 18° **(E)** 24°

16. Quale tra questi numeri è il più piccolo?
(A) $\frac{\sqrt{2018}}{2017}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2016}}{2015}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2019}}{2018}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2017}}{2016}$ **(E)** $\frac{\sqrt{2020}}{2019}$

17. Del quadrilatero convesso $ABCD$ si conoscono le misure dei lati AB, BC, CD e DA, che sono, nell'ordine, 4, 9, 6 e 11 cm. Indicati con E e F i punti medi dei lati AB e CD, si sa inoltre che l'area del quadrilatero $BEDF$ è di 18 cm^2. Di quanti cm^2 è l'area del quadrilatero $ABCD$?
(A) 27 **(B)** 36 **(C)** 24 **(D)** più di 50 **(E)** un valore tra 40 e 50

18. Dati dei numeri interi n e k, con $1 \leq k \leq n$, definiamo un polinomio, di grado $n - 1$, nel modo seguente:

$$p(x) = \frac{(x+1)(x+2)...(x+n)}{(x+k)}.$$

Ad esempio, se fosse $n = 5$ e $k = 2$, si avrebbe $p(x) = (x+1)(x+3)(x+4)(x+5)$. Supponiamo che, per una certa scelta di n e k, il coefficiente di x^{n-2} nel polinomio $p(x)$ sia uguale a 67. Qual è, in tal caso, il valore di n?
(A) 68 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 11 **(E)** 69

19. Le misure dei lati di un triangolo ABC sono: $\overline{AC} = \overline{BC} = 10$ cm, $\overline{AB} = 12$ cm. Quanti cm misura la parte di perimetro di ABC formata dai punti per i quali la distanza da A è minore della distanza da C?
(A) 27/2 **(B)** 16 **(C)** 12 **(D)** 25/2 **(E)** 40/3

20. Una pulce si trova inizialmente nell'origine del piano cartesiano e può spostarsi sui punti a coordinate intere scegliendo di volta in volta una di queste tre mosse:

- dal punto (x, y) salta al punto $(x, y + 5)$;
- dal punto (x, y) salta al punto $(x - 2, y - 3)$;
- dal punto (x, y) salta al punto $(x + 4, y - 9)$.

Quanti sono i percorsi, realizzabili dalla pulce con le sue mosse, che la portano dall'origine $(0, 0)$ al punto $(0, 2016)$?
(A) nessuno **(B)** precisamente 1 **(C)** un numero compreso tra 5 e 20
(D) un numero compreso tra 20 e 100 **(E)** infiniti