Unione Matematica Italiana
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca
Scuola Normale Superiore

I Giochi di Archimede - Gara Triennio
25 novembre 2015

Risoluzione dei problemi (l'ordine si riferisce al testo T1)

Problema 1. *La risposta è* **(E)**.
Giulio non può abbinare due paia di calzini di due colori diversi solo se ha preso, di ciascun colore tranne al più uno, al più un calzino. Il numero massimo di calzini che può aver preso, senza riuscire ad abbinare due paia di colori diversi, si ottiene prendendo tutti i calzini del colore più numeroso, ed esattamente un calzino di ogni altro colore. Questo significa prendere tutti e 40 i calzini grigi, e poi un singolo calzino dei restanti colori nero, blu e marrone, per un totale di 43 calzini. Non appena Giulio abbia presto almeno 44 calzini, è quindi sicuro di riuscire ad abbinare due paia di colori diversi.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 2. *La risposta è* **(D)**.
Alla frazione 4/7 corrisponde il numero periodico $0,\overline{571428}$ e le cifre si ripetono allora ogni sei posti. Poiché $2015 = 6 \cdot 335 + 5$, la 2015.esima cifra sarà uguale alla quinta, e sarà quindi un 2.
(Problema proposto da A. Dal Zotto - S. Pelizzola - R. Zanotto)

Problema 3. *La risposta è* **(C)**.
Chiamiamo a, b, c, d, e, f le età dei sei amici la cui media è di 16 anni, e g, h, i le età degli altri tre amici di Enea. Sappiamo che $a+b+c+d+e+f = 16 \cdot 6$ e che $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 18 \cdot 9$, dunque $\frac{1}{3}(g+h+i) = \frac{1}{3}(18 \cdot 9 - 16 \cdot 6) = 22$.
(Problema proposto da S. Monica)

Problema 4. *La risposta è* **(C)**.
Indicato con n il numero di 1 usciti, la somma sarà $n + 4(150 - n) = 600 - 3n$, con $0 \leq n \leq 150$. Poiché i possibili valori di n (da 0 a 150) sono in tutto 201 e poiché, variando n, varia la somma suddetta, i possibili valori di tale somma sono appunto 151.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 5. *La risposta è* **(B)**.
Due persone che siedono l'una accanto all'altra non possono essere entrambe furfanti o entrambe cavalieri. In effetti, se la persona a destra, delle due, è un cavaliere allora dice il vero, e quindi il suo vicino di sinistra è un furfante; viceversa, se la persona a destra è un furfante allora dice il falso, e quindi il suo vicino di sinistra è un cavaliere.
Questo mostra che cavalieri e furfanti si alternano al tavolo, e pertanto sono nello stesso numero; in conclusione, i presenti alla riunione sono in numero pari. Sapendo che meno di 100 sono cavalieri, il totale dei presenti è inferiore a 200; la risposta corretta si trova osservando che 94 è l'unico numero pari inferiore a 200 tra quelli elencati.
(Problema proposto da F. Florian)

Problema 6. *La risposta è* **(A)**.
Una volta scelta (in 3 modi possibili) la tinta della prima parete, se Giovanni dipinge la parete opposta dello stesso colore allora ha 2 scelte possibili di tinte per ciascuna delle 2 pareti restanti; se invece dipinge la parete opposta alla prima di un colore diverso (tra i 2 possibili), la scelta delle tinte per le restanti due pareti risulta determinata. Giovanni ha pertanto $3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 18$ scelte possibili.
(Problema proposto da F. Poloni)

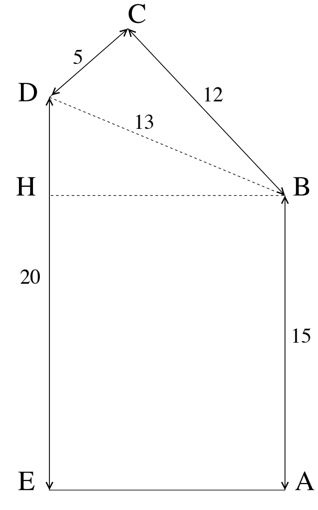
Problema 7. *La risposta è* **(E)**.
Poiché $7^4 = 2401$, ogni potenza $7^{4n} = (7^4)^n$ termina per la cifra 1. Il numero 8^9 è sicuramente multiplo di 4, pertanto la cifra delle unità di $7^{(8^9)}$ è 1.
(Problema proposto da S. Yang)

Problema 8. *La risposta è* **(D)**.
Sia O il centro del piatto circolare ed $x = \overline{OC}$. Il raggio della circonferenza vale dunque $r = x + 5$ e, per il teorema di Pitagora, si ha $(x + 5)^2 = r^2 = x^2 + (30/2)^2$, da cui $x = 20$ ed $r = 25$.
(Problema proposto da F. Getman)

Problema 9. *La risposta è* **(E)**.
I 6 più piccoli divisori di 40! maggiori di 40 sono: 42, 44, 45, 46, 48, 49, i quali si fattorizzano tutti con fattori che ritroviamo in qualcuno dei numeri da moltiplicare per ottenere 40! (ad esempio $44 = 4 \cdot 11$, $49 = 7 \cdot 7$ che è divisore di $7 \cdot 14$, etc.). Viceversa, i numeri primi maggiori di 40 non dividono 40!, dato che un numero primo divide un prodotto di interi se e solo se divide uno dei fattori e, chiaramente, nessuno degli interi che vengono moltiplicati per ottenere 40! è divisibile per un numero primo che sia maggiore di 40.
Pertanto, il valore richiesto si trova sommando i 6 numeri sopra elencati, vale a dire 274.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 10. *La risposta è* **(D)**.
Chiamiamo z, c, p le quantità rispettivamente di zucchero, cacao e olio di palma presenti nel prodotto (espresse in percentuale). Sappiamo che $z + c + p = 80$, e che $4 \leq p \leq 16 \leq c \leq z$. La percentuale massima di cacao che il prodotto potrebbe contenere si ottiene per i valori minimi p, z degli altri due ingredienti, compatibili con tali equazioni e disequazioni; cioè per $p = 4$ e $z = c$. Dunque $c = (80 - 4)/2 = 38$.
(Problema proposto da F. Poloni)

Problema 11. *La risposta è* **(E)**.
Tracciata da B la perpendicolare BH al lato DE, si può agevolmente osservare che i triangoli rettangoli BCD e BHD sono congruenti, per cui BH misura 12 m.
In alternativa, si può pervenire allo stesso risultato applicando il teorema di Pitagora prima per determinare la diagonale BD e poi per BH.
L'area del pentagono è dunque data dalla somma tra l'area del rettangolo $ABHE$ e l'area del quadrilatero $BCDH$ (che è il doppio del triangolo rettangolo BCD).
Pertanto, l'area richiesta è data (in m^2) da $16 \cdot 12 + 5 \cdot 12 = 252$.
(Problema proposto da P. Francini)



Problema 12. *La risposta è* **(D)**.
Poiché $24 = 2^3 \cdot 3$, le cifre che possono apparire nel codice di sblocco sono $1, 2, 3, 4, 6$ e 8.
I codici che contengono la cifra 8 devono contenere la cifra 3, quindi l'1 ripetuto due volte. Il numero di tali codici è uguale al numero di possibili scelte di due posti tra 4 (quelli in cui va la cifra 1), moltiplicato per 2 (le possibilità di mettere il 3 ed l'8 nei due posti restanti): quindi, $2 \cdot \binom{4}{2}$.
I codici che contengono la cifra 6 devono contenere o la cifra 2 ripetuta due volte e quindi un 1, oppure la cifra 4 e l'1 ripetuto due volte; in ciascuno dei due casi il numero dei codici possibili è ancora $2 \cdot \binom{4}{2}$.
I codici che contengono la cifra 4 diversi da quelli considerati finora (cioè senza 6) devono contenere esattamente le cifre $4, 1, 2, 3$: il numero di tali codici è uguale al numero di permutazioni di 4 elementi, cioè $4!$.
Infine, i codici che contengono la cifra 2, diversi da quelli considerati finora (cioè senza 4, né 6, né 8), devono contenerla per forza tre volte, insieme alla cifra 3: il numero di tali codici è uguale al numero di possibili scelte di un posto tra 4, cioè 4. Poiché ogni codice deve contenere almeno una cifra pari, deduciamo che il numero totale dei codici possibili è $2 \cdot \binom{4}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \binom{4}{2} + 4! + 4 = 64$.
(Problema proposto da A. Pesare)

Problema 13. *La risposta è* **(C)**.
Ogni riga e ogni colonna della griglia contiene un numero dispari di quadratini; pertanto, ogni mossa inverte la parità del numero di caselle scure di quella riga o colonna, e di conseguenza anche la parità complessiva del numero di caselle scure dell'intera griglia.
Dopo dieci mosse, la parità sarà stata scambiata 10 volte, e quindi coinciderà con quella della configurazione iniziale. Poiché all'inizio vi è solo una casella scura, dopo aver effettuato dieci mosse, il numero di caselle scure dovrà essere dispari. Delle configurazioni mostrate, solo la terza ha un numero dispari di caselle; possiamo quindi essere certi che non è possibile ottenere le altre configurazioni in 10 mosse a partire da quella iniziale.
È importante osservare che in principio non ogni configurazione con un numero dispari di caselle nere è ottenibile per mezzo di 10 mosse. La configurazione **(C)** è ottenibile, ad esempio, con questa sequenza di mosse: 4^a colonna, 4^a riga, 3^a colonna, 6^a riga, 6^a colonna, 3^a riga, poi 4 volte una stessa mossa.
(Problema proposto da F. Mugelli)

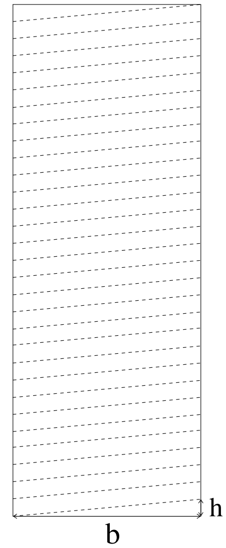
Problema 14. *La risposta è* **(D)**.
Se p è un numero primo tale che $2p \leq 100$, poiché 2 e p hanno un multiplo in comune tra quelli utlizzati, segue che le palline coi numeri 2, $2p$ e anche p dovranno essere colorate nello stesso modo. Pertanto, una volta scelto il colore per la pallina n°2, lo stesso colore va impiegato per tutti i numeri primi che non superano 50 e, di conseguenza, per tutte le palline che hanno tali numeri tra i loro fattori.
I soli numeri che restano esclusi, dunque, dal colore scelto per la pallina n°2 sono i numeri primi maggiori di 50, vale a dire 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, che Gianni può colorare liberamente. È possibile usare quindi al più 11 colori.
(Problema proposto da A. Pesare)

Problema 15. *La risposta è* **(C)**.

La filettatura della vite è un'elica di passo costante su un cilindro circolare, che sale cioè proporzionalmente alla sua lunghezza. Sviluppando il cilindro sul piano cartesiano, si ottiene un rettangolo di lato $b = 2\sqrt{30}$ mm ed altezza $h = 30$ mm, e l'elica corrisponde dunque a un insieme di $g = 30$ segmenti paralleli con pendenza h/gb come in figura.

La sua lunghezza si ottiene dunque dal teorema di Pitagora ed è uguale a $g\sqrt{b^2 + (h/g)^2} = 30\sqrt{120 + 1} = 330\,mm$

(Problema proposto da A. Dal Zotto - S. Pelizzola - R. Zanotto)



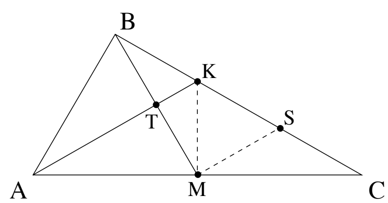
Problema 16. *La risposta è* **(A)**.

Quando il ciclista e il podista si incontrano per la prima volta, hanno percorso complessivamente l'intera distanza tra A e B. Sappiamo inoltre che il podista ha percorso 12 km, e che la distanza coperta dal ciclista, che si muove tre volte più velocemente, è tripla; possiamo concludere che A e B distano 48 km, e che il ciclista ha fino a quel momento percorso 36 km.

Se il secondo incontro avviene dopo che il podista abbia percorso ulteriori x km, il ciclista ne avrà percorsi ulteriori $2 \cdot 12 + x$. La velocità è sempre tripla, e quindi $24 + x = 3x$. Risolvendo, si ottiene $x = 12$. Il secondo incontro avviene quindi a 24 km da B, e quindi a 24 km anche da A.

(Problema proposto da A. Dal Zotto - S. Pelizzola - R. Zanotto)

Problema 17. *La risposta è* **(C)**.



Sia BM la mediana, AK la bisettrice e T l'intersezione delle due. I triangoli rettangoli ATB e ATM sono congruenti in quanto hanno ugual base AT ed angoli alla base uguali. Quindi $\overline{AB} = \overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{AC} = 2\overline{AB}$. Per il teorema della bisettrice, $\overline{AC}/\overline{KC} = \overline{AB}/\overline{BK}$, cioè $\overline{CK} = 2\overline{BK}$. Ora, la parallela ad AK dal punto M incontra il lato BC nel punto medio S di KC; per il teorema di Talete, si ha dunque $\overline{MS} = \overline{AK}/2 = 7/2$. D'altronde il triangolo BMS è simile a BTK, e $\overline{BK} = \overline{CK}/2 = \overline{KS}$; dunque $\overline{TK} = \overline{MS}/2 = 7/4$. La lunghezza del segmento AT vale allora $7 - 7/4 = 21/4$. Poiché il triangolo ABC ha stessa altezza del triangolo ABM e base AC lunga il doppio di AM, concludiamo che $area(ABC) = 2\,area(ABM) = (21/4) \cdot 8 = 42$.

(Problema proposto da F. Caceffo)

Problema 18. *La risposta è* **(A)**.

Poiché la somma di tutti i numeri da 1 a 9 è 45, la somma di ciascuna riga e ciascuna colonna sarà uguale a $45/3 = 15$. Una riga o colonna sulla quale si trova 1 dovrà quindi contenere i numeri $1, 6, 8$ oppure $1, 5, 9$ che sono le uniche possibilità che forniscono somma 15 con numeri tutti distinti. Allo stesso modo, una riga o colonna che contiene 9 sarà formata da $9, 1, 5$ oppure $9, 2, 4$.

Possiamo a questo punto contare i possibili riempimenti nel seguente modo: scegliamo la posizione di 1 (in nove modi possibili) e scegliamo se disporre 5, 9 sulla stessa riga o sulla stessa colonna (due modi). Una volta fatto questo, decidiamo la posizione di 5 e 9 sulle due caselle libere della riga o colonna scelta (due modi) e di 6 e 8 sulle due caselle libere della colonna o riga residua (due modi). A questo punto, si può vedere che esiste uno e un solo modo di completare la tabella: ossia collocando 2 all'incrocio delle file (differenti dalle due già completate) contenenti 6 e 9, poi 3 all'incrocio delle file contenenti 8 e 5, poi 4 all'incrocio delle file con 8 e 9, infine 7 all'incrocio delle file con 6 e 5.

In totale, le possibilità sono quindi $9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 72$.

(Problema proposto da F. Caceffo)

Problema 19. *La risposta è* **(B)**.
La formica dovrà percorrere almeno tutta la lunghezza della griglia formata dai quattro quadratini (12 metri) per coprirla tutta. Poiché però la griglia ha quattro punti A, B, C, D (diversi dal vertice iniziale) da ognuno dei quali si dipartono tre lati, essa dovrà passare per tutti e quattro questi punti almeno due volte; ciò implica che, per ognuno dei quattro punti A, B, C, D, essa percorrerà uno dei lati uscenti da tali punti almeno due volte. Pertanto percorrerà almeno 16 metri. Infine, è facile costruire un percorso di 16 metri che copre tutta la griglia: per esempio, partendo dal vertice in basso a sinistra e utilizzando le direzioni cardinali, il percorso: $EENNWSEWSNNWSEWS$.
(Problema proposto da M. Trevisiol)

Problema 20. *La risposta è* **(D)**.
Le persone che si alzano non possono essere quattro o più, perché altrimenti due di esse sarebbero sedute l'una a fianco all'altra. E' sufficiente quindi calcolare quanti gruppi di al più tre persone, a due a due non adiacenti, è possibile scegliere tra i sette amici.
Se si tratta di una sola persona, vi sono 7 scelte. Se sono due, una volta scelta la prima in 7 modi possibili, la seconda deve essere scelta tra le due non adiacenti, in 4 modi possibili: a questo punto abbiamo contato ciascuna scelta due volte (potendo scegliere la prima delle due persone in 2 modi possibili); in totale abbiamo $7 \cdot 4/2 = 14$ possibilità.
Se il gruppo è di tre persone, le persone tra di loro (che rimangono sedute) sono $1, 1, 2$. Allora è sufficiente dare l'informazione di quale sia la persona seduta immediatamente alla destra del gruppo di 2 per individuare completamente la configurazione; questo può essere fatto in 7 modi.
In totale, abbiamo $7 + 14 + 7 = 28$ possibilità.
(Problema proposto da Tron)