

Risoluzione dei problemi (l'ordine si riferisce al testo 1)

Problema 1. *Nel paese di Gnallucci circolano quattro monete: dobloni, zecchini, talleri e fufignezi. Un doblone vale quanto uno zecchino più un tallero e un fufignezo. Due dobloni valgono quanto uno zecchino più tre talleri e cinque fufignezi. Un tale entra in un negozio con uno zecchino e ne esce con un tallero. In fufignezi, quanto ha pagato?*

(A) 1, (B) 2, (C) 3, (D) 4, (E) 5.

La risposta è (C). Indichiamo con D, Z, F, T il valore di un doblone, di uno zecchino, di un fufignezo e di un tallero, rispettivamente. Sappiamo che $D = Z + T + F$ e $2D = Z + 3T + 5F$. Se, ad esempio, moltiplichiamo la prima equazione per due e la sottraiamo dalla seconda troviamo: $Z = T + 3F$. Dunque il tale ha pagato 3 fufignezi.

[Problema proposto da M. Mamino.]

Problema 2. *Quanto fa $(1, \bar{3}) \cdot (0, \bar{3})$?*

(A) 0,4 (B) $0,4\bar{3}$ (C) $0,4$ (D) $\frac{13}{33}$ (E) *nessuno dei precedenti.*

La risposta è (C). Per fare il calcolo dobbiamo usare le frazioni generatrici (altrimenti dovremmo fare un numero infinito di moltiplicazioni e riporti!). La frazione generatrice di $0, \bar{3}$ è $\frac{1}{3}$. Poichè $1, \bar{3} = 1 + 0, \bar{3}$, la frazione generatrice di $1, \bar{3}$ sarà: $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Dunque

$$(0, \bar{3}) \cdot (1, \bar{3}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{9} = 0, \bar{4}.$$

[Problema proposto da A. Colesanti e A. Sambuseti.]

Problema 3. *Paperopoli dista da Topolinia 4 ore di viaggio. Paperino parte da Paperopoli alle 4 del mattino, ora locale, e, per via del fuso orario, arriva a Topolinia all'ora (locale) di pranzo. A che ora torna a Paperopoli se riparte due ore dopo?*

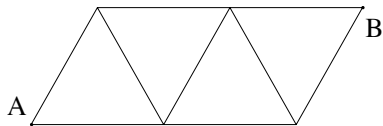
(A) Alle 12, (B) alle 14, (C) alle 15, (D) alle 16, (E) *dipende dall'ora a cui pranzano a Topolinia.*

La risposta è (B). Supponiamo che tra Paperopoli e Topolinia ci sia un differenza di fuso orario di D ore, e più precisamente a Topolinia gli orologi siano D ore avanti rispetto a Paperopoli. Dunque Paperino arriva a Topolinia alle ore $4 + 4 + D = 8 + D$, e riparte due ore dopo, cioè alle $10 + D$. Quando arriva di nuovo a Paperopoli sono le $14 + D$, ora di Topolinia, a cui si deve sottrarre la differenza di fuso orario D per avere l'ora di Paperopoli. In conclusione torna a Paperopoli alle 14.

[Problema proposto da A. Iraci.]

Problema 4. *Un parallelogramma è costruito incollando quattro triangoli equilateri di lato 10 cm come in figura. Quanti cm distano i vertici opposti A e B?*

(A) 25, (B) $\sqrt{675}$, (C) $\sqrt{700}$, (D) $\sqrt{825}$, (E) 30.



La risposta è (C). L'altezza h di uno qualsiasi dei quattro triangoli equilateri è uguale, per il teorema di Pitagora, ad $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$. Il segmento AB è uguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti $b = 10 + 10 + 5$ e $h = \sqrt{75}$, dunque $AB = \sqrt{25^2 + 75} = \sqrt{700}$.

[Problema proposto da L. Ghidelli.]

Problema 5. *I numeri a, b e c sono interi relativi. Si sa che $a^2bc = 1$. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?*

(A) $a = 1$ e $b = 1$, (B) $a = -1$ e $c = 1$, (C) $b^2ac = 1$, (D) $a^2b^2 = 1$, (E) $a \neq 1$.

La risposta è (D). Nessuno dei tre numeri interi a, b e c può essere diverso da 1 o -1 , altrimenti, trattandosi di numeri interi, il prodotto a^2bc non sarebbe uguale a 1. Quindi l'uguaglianza contenuta nella risposta (D) è certamente vera. Verifichiamo che le altre risposte non sono corrette. Il numero a può essere indifferentemente 1 o -1 perché nell'uguaglianza $a^2bc = 1$ compare solo il suo quadrato. Quindi le risposte (A) e (B) e (D) non sono corrette (ovvero, le affermazioni in esse contenute non sono necessariamente vere). Anche la risposta (C) non è corretta: la terna $a = -1, b = 1, c = 1$ verifica la richiesta del problema, ma non $b^2ac = 1$.

[Problema proposto da C. Antonucci.]

Problema 6. *In una certa azienda ogni dirigente percepisce uno stipendio pari a quattro volte quello di ogni operaio. Il costo complessivo che l'azienda sostiene per pagare gli stipendi di tutti i dipendenti è uguale a sei volte il costo complessivo degli stipendi di tutti i dirigenti. Quanti operai ci sono per ciascun dirigente?*

(A) 5, (B) 6, (C) 20, (D) 24, (E) 30.

La risposta è (C). Chiamiamo \mathcal{D} ed \mathcal{O} rispettivamente il numero di dirigenti ed operai dell'azienda, e con d il costo di ciascun dirigente. Poiché ogni operaio costa all'azienda $d/4$, il costo totale T sostenuto dall'azienda per tutti i dipendenti è: $6d\mathcal{D} = T = d\mathcal{D} + \frac{d}{4}\mathcal{O}$, da cui si deduce $\mathcal{O} = 20\mathcal{D}$.

[Problema proposto da P. Negrini.]

Problema 7. *Al luna park c'è un distributore di biglie con due pulsanti e un contenitore: il primo pulsante fa entrare 16 biglie nel contenitore, il secondo aumenta il numero di biglie nel contenitore del 50%. Inserendo una moneta, si può premere uno qualsiasi dei due pulsanti. Se il contenitore inizialmente è vuoto, quante biglie al massimo si possono far entrare nel contenitore con 5 monete?*

(A) 70, (B) 80, (C) 88, (D) 96, (E) 108.

La risposta è **(E)**. Notiamo innanzitutto che il numero di biglie nel contenitore è sempre pari, quindi il distributore introduce sempre un numero intero di biglie. Supponiamo che a un certo punto ci siano N biglie nel contenitore: se scelgo di metterne altre 16 passo a $N + 16$ biglie, se scelgo di aumentarne il numero del 50% passo a $N + \frac{N}{2} = \frac{3}{2}N$. L'operazione più vantaggiosa per averne il maggior numero possibile dipende dal valore di N :

- se $N + 16 > \frac{3}{2}N$ (cioè $N < 32$), conviene aggiungere 16 biglie,

- se $N + 16 < \frac{3}{2}N$ (cioè $N > 32$), conviene aumentare il numero di biglie del 50%,

e se $N = 32$ le due operazioni sono equivalenti. Inizialmente abbiamo $N = 0$, quindi al primo passo la scelta più vantaggiosa è portare il numero di biglie a 16. Poiché $16 < 32$, useremo la seconda moneta per aumentare ancora il numero di biglie di 16 ed arrivare a 32 biglie. A questo punto sappiamo che la scelta tra le due opzioni è indifferente, e con la terza moneta otterremo comunque $32 + 16 = 48$ biglie. Poiché ora il numero di biglie ha superato 32, useremo le ultime due monete per aumentare ad ogni passo il numero di biglie del 50%, passando prima da 48 a $48 + 24 = 72$, e poi a $72 + 36 = 108$.

[Problema proposto da G. Barbarino.]

Problema 8. *Agata, Nina e Leo decidono che al “Via!” ciascuno di loro dirà (a caso) BIM, oppure BUM, oppure BAM. Qual è la probabilità che dicano tutti e tre la stessa cosa?*

(A) Meno di $\frac{1}{12}$, **(B)** tra $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{10}$, **(C)** tra $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{8}$, **(D)** tra $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{6}$, **(E)** più di $\frac{1}{6}$.

La risposta è **(C)**. I possibili eventi che si possono verificare al “Via!” sono 27. Infatti, per ciascuna delle tre possibili scelte di Agata, vi sono tre possibili scelte di Nina, e per ciascuna di esse ancora tre possibili scelte di Leo. Ci sono dunque $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ possibilità. Di queste, i casi in cui tutti e tre dicono la stessa parola sono esattamente tre (se dicono tutti e tre BIM, oppure tutti e tre BUM, oppure tutti e tre BAM). La probabilità che dicano tutti e tre la stessa cosa è data dal rapporto

$$\frac{3}{27} = \frac{1}{9},$$

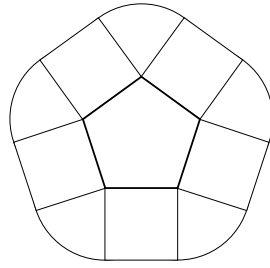
cioè il numero dei casi “favorevoli” sul numero totale dei casi possibili.

[Problema proposto da A. Colesanti.]

Problema 9. *Sia dato un pentagono regolare di lato 1 cm; quanti cm^2 vale l'area dell'insieme di punti del piano che sono esterni al pentagono e distano al più 1 cm da esso?*

(A) $(5 + \pi)$, **(B)** $(3/2 + 2\pi)$, **(C)** 7, **(D)** 8, **(E)** 3π .

La risposta è **(A)**. Se prendiamo un punto P esterno al pentagono possiamo considerare il punto del pentagono più vicino a P , che chiamiamo P' . Il punto P' può essere interno a uno dei lati del pentagono, oppure coincidere con un suo vertice. L'insieme dei punti P esterni al pentagono per cui P' cade all'interno di uno dei lati è formato da cinque quadrati (uno per ciascun lato) di lato 1, la cui area complessiva è 5. L'insieme dei punti P esterni al pentagono per cui P' è un vertice del pentagono è formato invece da quattro “spicchi”, ovvero settori circolari di raggio 1 ed angolo al centro $\frac{2\pi}{5}$, tutti congruenti tra loro; questi, se traslati in modo da avere lo stesso centro, formano (senza sovrapporsi se non sul bordo) un cerchio di raggio 1 ed area π :



Pertanto l'area cercata è uguale a $(5 + \pi)$.
 [Problema proposto da G. Paolini.]

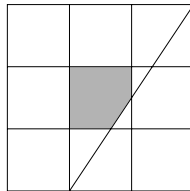
Problema 10. *Otto giocatori, di cui quattro sono difensori e quattro sono attaccanti, organizzano un torneo di biliardino. Ogni possibile coppia difensore-attaccante gioca una e una sola volta contro ogni altra possibile coppia difensore-attaccante. Quanti incontri faranno in tutto?*
 (A) 24, (B) 36, (C) 48, (D) 72, (E) 144.

La risposta è (D). Per ogni possibile scelta di 2 difensori tra i 4 difensori possibili e di 2 attaccanti tra i 4 possibili attaccanti si ottengono quattro squadre distinte, dunque due partite. Il numero totale di partite è allora $n = 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$, dove $\binom{4}{2} = 6$ è il numero di possibili scelte di 2 oggetti presi tra 4. Quindi $n = 72$.
 [Problema proposto da A. Iraci.]

Problema 11. *È dato un numero primo di tre cifre le cui cifre sono, nell'ordine: a, b, c . Quanti divisori primi ha il numero di sei cifre la cui scrittura è $abcabc$? [Ricordiamo che 1 non è un numero primo.]*
 (A) 1, (B) 2, (C) 3, (D) 4, (E) 5.

La risposta è (D). Osserviamo che $abcabc = abc \cdot 1000 + abc = abc \cdot (1000 + 1) = abc \cdot 1001$. Scomponiamo ora 1001 in fattori primi: $1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$. Dunque $abcabc = abc \cdot 13 \cdot 11 \cdot 7$ e i quattro fattori sono tutti numeri primi (abc è primo per ipotesi). Quindi i divisori primi di $abcabc$ sono abc , 13, 11 e 7, cioè quattro in tutto.
 [Problema proposto da S. Mongodi.]

Problema 12. *Il quadrato in figura è diviso in 9 quadratini congruenti. Sapendo che il lato del quadrato grande misura L , calcolare l'area evidenziata in grigio.*
 (A) $\frac{11}{108}L^2$, (B) $\frac{1}{9}L^2$, (C) $\frac{5}{54}L^2$, (D) $\frac{1}{12}L^2$, (E) $\frac{13}{81}L^2$.



La risposta è **(A)**. Chiamiamo Q il quadrato grande di lato L , q il quadratino centrale, T il triangolo rettangolo più grande tagliato dal segmento obliquo nel quadrato Q , e t il triangolo rettangolo più piccolo tagliato dallo stesso segmento dentro al quadratino q . Chiaramente $\text{area}(q) = \frac{1}{9}\text{area}(Q)$. I triangoli t e T sono invece simili di rapporto $\frac{1}{6}$ (poiché l'altezza di t è $\frac{1}{6}L$), quindi si ha $\text{area}(t) = (\frac{1}{6})^2 \text{area}(T)$. Infine, poiché la base di T è $\frac{2}{3}L$, si ha $\text{area}(T) = \frac{1}{3}\text{area}(Q)$. Ne deduciamo:

$$\text{area}(t) = \frac{1}{36}\text{area}(T) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3}\text{area}(Q) = \frac{1}{12}\text{area}(q).$$

Allora l'area del pentagono evidenziato in grigio vale

$$\text{area}(q) - \text{area}(t) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)\text{area}(q) = \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{9}\text{area}(Q) = \frac{11}{108}L^2.$$

[Problema proposto da A. Pesare.]

Problema 13. *Quante cifre ha il numero 20^{10} ?*

(A) 10, **(B)** 11, **(C)** 13, **(D)** 14, **(E)** 15.

La risposta è **(D)**. Osserviamo che

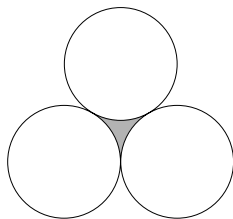
$$20^{10} = (2 \cdot 10)^{10} = 2^{10} \cdot 10^{10} = 1024 \cdot 10^{10}.$$

Questo numero si scrive come 1024 seguito da 10 zeri, e quindi ha $4 + 10 = 14$ cifre.

[Problema proposto da A. Colesanti, F. Poloni, A. Sambusetti.]

Problema 14. *Sono date tre circonferenze aventi tutte raggio 1 cm e tangenti due a due come in figura. Calcolare l'area in cm^2 della parte compresa tra le tre circonferenze, evidenziata in grigio in figura.*

(A) $(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$, **(B)** $\sqrt{3}$, **(C)** 3, **(D)** $\frac{\pi}{2}$, **(E)** π .



La risposta è **(A)**. Siano \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} le tre circonferenze, di centri rispettivi A , B e C . Osserviamo che il segmento AB passa per il punto di tangenza tra le due circonferenze \mathcal{A} e \mathcal{B} , e quindi ha lunghezza 2. Lo stesso discorso vale per i segmenti BC e AC . Quindi il triangolo ABC è equilatero ed ha lato pari a 2. La sua altezza è uno dei cateti di un triangolo rettangolo pari alla metà del triangolo ABC : per il teorema di Pitagora, tale altezza vale $\sqrt{3}$. L'area del triangolo ABC vale

$$\text{area}(ABC) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

Siano ora E , F e G i punti di tangenza tra le circonferenze \mathcal{A} e \mathcal{B} , \mathcal{B} e \mathcal{C} , \mathcal{C} e \mathcal{A} rispettivamente. Il settore circolare \widehat{EAG} di centro A ed estremi E e G , ha ampiezza $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ed area $\frac{\pi}{6}$. Stessa area hanno gli altri due settori circolari \widehat{EBF} e \widehat{FCG} . L'area da determinare vale quindi:

$$\text{area}(ABC) - 3 \cdot \text{area}(\widehat{EAG}) = \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

[Problema proposto da S. Di Trani.]

Problema 15. *Uno studente in gita si sveglia la mattina e, dalla sua stanza di un hotel a sette piani (oltre al piano terra), scende in ascensore per recarsi al piano terra e fare colazione. Tuttavia, molto assonnato, preme ripetutamente il pulsante sbagliato e visita esattamente una volta tutti gli altri piani (escluso il suo), prima di arrivare finalmente al piano terra. Sapendo che la sua stanza non si trova al piano terra, quanta strada percorre l'ascensore, al massimo?*
(A) 29 piani, **(B)** 28 piani, **(C)** 27 piani, **(D)** 26 piani, **(E)** 25 piani.

La risposta è **(B)**. Sia L la lunghezza (in piani) del più lungo percorso in ascensore effettuabile premendo 7 pulsanti differenti, arrivando al piano terra al 7° viaggio. Supponiamo che tale percorso sia ottenuto partendo dal piano x_0 e premendo, nell'ordine, i pulsanti $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 = 0$. Mostriamo che tale percorso è ottenuto invertendo ogni volta direzione di marcia.

Infatti, se non si invertisse il senso di marcia anche una sola volta, la lunghezza di tale percorso equivarrebbe alla lunghezza di un percorso effettuato partendo da x_0 e premendo meno di 7 pulsanti, diciamo nell'ordine $y_1, \dots, y_k = 0$ con $k \leq 6$, e invertendo ogni volta senso di marcia. Ma in tale percorso si evita necessariamente un piano y_0 , sicché il percorso ottenuto:

- andando inizialmente dal piano y_0 ad y_1 (se il piano x_0 si trova tra y_0 ed y_1), e quindi seguendo la successione di piani y_2, \dots, y_k ,

- ovvero andando inizialmente da y_0 ad x_0 (se x_0 non sta tra y_0 e y_1), e poi seguendo la successione di piani y_1, \dots, y_k ,
sarebbe più lungo di L , contraddizione.

Pertanto il percorso più lungo è ottenuto necessariamente da una successione di piani che verificano

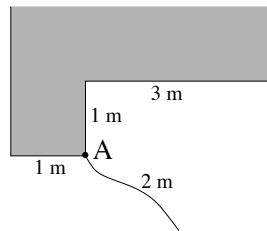
$$x_0 > x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > x_5 < x_6 > x_7 = 0.$$

La lunghezza percorsa è allora $L = \sum_{i=0}^6 |x_{i+1} - x_i| = 2(x_2 + x_4 + x_6) - 2(x_1 + x_3 + x_5) + x_0$. Tale numero è massimo per il valore più piccolo possibile di $(x_1 + x_3 + x_5)$ e per il valore più grande possibile di $(x_2 + x_4 + x_6)$, quindi $L = 2 \cdot (5 + 6 + 7) - 2 \cdot (1 + 2 + 3) + 4 = 28$.

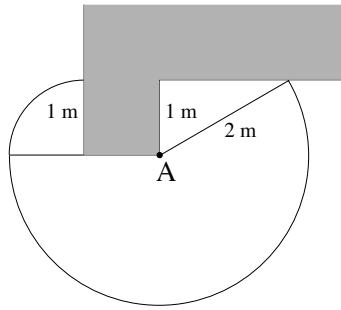
[Problema proposto da G. Paolini.]

Problema 16. *Francesco vuole seminare una zona del giardino della sua casa, che ha la forma riportata in figura (casa in grigio e giardino in bianco tutto intorno). Per far questo, lega una corda di 2 m all'angolo A della casa, la tende e, spostandone l'estremità, disegna il perimetro della zona da seminare. Quanti m^2 seminerà Francesco?*

(A) $2\pi + \sqrt{3}$, **(B)** $\frac{15}{4}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$, **(C)** $\frac{31}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$, **(D)** $\frac{9}{4}\pi$, **(E)** $4\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.



La risposta è **(C)**. L'area da seminare è uguale alla metà di un triangolo equilatero di lato 2 (il cui angolo in A vale $\frac{\pi}{3}$), più quella di un settore circolare di raggio 2 e di angolo al centro $\frac{7\pi}{6}$, più quella di un settore circolare di raggio 1 ed angolo al centro $\frac{\pi}{2}$:



Il totale fa dunque $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{12} \cdot 4 + \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{31}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 [Problema proposto da F. Mugelli]