

*I Giochi di Archimede - Gara Triennio*

23 novembre 2005

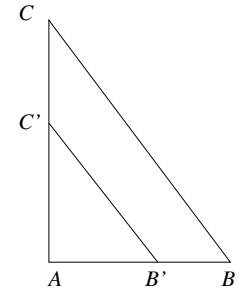
- 1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
- 2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
- 3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
- 4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è un'ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Classe \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

- 1) Qual è il valore massimo che può assumere il numero  $a(b+c) - b(a+c)$  quando  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono numeri interi distinti tra loro, maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 10?  
(A) 80, (B) 81, (C) 84 (D) 90, (E) 100.
- 2) Quanti sono i numeri interi positivi  $n$  tali che  $n^3 + 2n^2 + n$  sia un quadrato perfetto?  
(A) Nessuno, (B) almeno 1, ma non più di 4, (C) almeno 5, ma non più di 9, (D) almeno 10 ma non più di 20, (E) nessuna delle precedenti.
- 3) Per quante coppie ordinate  $(a, b)$  di numeri interi accade che il loro prodotto sia uguale alla loro somma?  
(A) Nessuna, (B) una, (C) due, (D) quattro, (E) più di quattro.
- 4) Quanti sono i numeri di 4 cifre la cui cifra iniziale è 1 e che hanno almeno 3 cifre uguali tra loro?  
(A) 36, (B) 37, (C) 39, (D) 40, (E) nessuna delle precedenti.
- 5) In un triangolo, per ogni coppia di lati consecutivi, i due assi dei lati e la bisettrice dell'angolo formato dai due lati si incontrano in uno stesso punto. Possiamo affermare che:  
(A) non esiste un triangolo con questa proprietà, (B) il triangolo è equilatero, (C) il triangolo ha un angolo di  $30^\circ$ , (D) il triangolo è rettangolo, (E) il triangolo ha un angolo di  $45^\circ$ .

- 6) Quanti sono i numeri naturali  $n$  tali che  $2n$  divide  $n + 30$ ?  
(A) uno, (B) due, (C) tre, (D) quattro, (E) più di quattro.
- 7) Fabio ritrova un suo vecchio lucchetto a combinazione; il lucchetto è chiuso e per aprirlo bisogna allineare nell'ordine giusto tre cifre, ciascuna delle quali può variare da 0 a 9. Fabio non ricorda la combinazione corretta, ma è sicuro che la somma delle tre cifre sia 10. Quanti tentativi dovrà fare, al massimo, per trovare la combinazione corretta?  
(A) 61, (B) 63, (C) 65, (D) 67, (E) 69.
- 8) Il triangolo  $ABC$  è rettangolo ed i cateti  $AB$  e  $AC$  misurano 3 m e 4 m rispettivamente. Siano  $B'$  e  $C'$  punti appartenenti ai lati  $AB$  e  $AC$  rispettivamente, tali che la retta contenente il segmento  $B'C'$  sia parallela a quella contenente il segmento  $BC$  e distante 1 m da essa (vedi figura). Calcolare l'area del triangolo  $AB'C'$ .  
(A)  $\frac{49}{24}$  m<sup>2</sup>, (B) 2 m<sup>2</sup>, (C)  $\frac{65}{24}$  m<sup>2</sup>, (D)  $\frac{7}{2}$  m<sup>2</sup>,  
(E) nessuna delle precedenti.

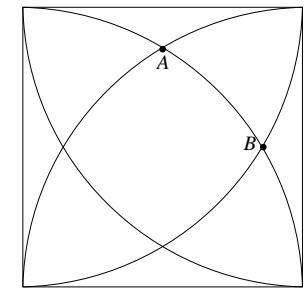


- 9) Quanti sono i numeri interi  $n$  tali che  $n - 52$  e  $n + 53$  siano due quadrati perfetti?  
(A) 1, (B) 2, (C) 3, (D) 4, (E) 8.
- 10)  $a$  e  $b$  sono due numeri reali tali che

$$2a^4 - 4ab + b^2 + 2 = 0.$$

Quanti valori distinti può assumere  $a$ ?  
(A) 1, (B) 2, (C) 3, (D) 4, (E) non esiste alcuna coppia  $(a, b)$  che verifica la condizione.

- 11) Nel quadrato in figura sono stati disegnati i quattro archi di circonferenza ciascuno avente centro in uno dei vertici del quadrato e raggio pari al lato del quadrato, che misura 10 m. Quanto vale la distanza tra  $A$  e  $B$ ?  
(A)  $3(\sqrt{6} - 1)$  m, (B) 5 m, (C)  $5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$  m,  
(D)  $8(\sqrt{3} - 1)$  m, (E) nessuna delle precedenti.



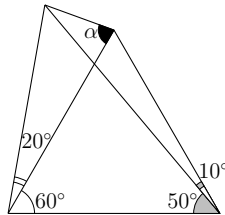
- 12) Una gara di matematica è composta da 10 domande a risposta multipla, ciascuna con quattro possibili risposte contrassegnate dalle lettere A, B, C e D (per ogni domanda vi è una e una sola risposta corretta). Carlo viene a sapere che la lista delle risposte corrette contiene tre lettere A, tre lettere B, due lettere C e due lettere D. Qual è la probabilità che Carlo, scegliendo a caso una lista che abbia

questa caratteristica, risponda correttamente a tutte le domande?  
**(A)**  $1/26500$ , **(B)**  $1/25200$ , **(C)**  $1/24600$ , **(D)**  $1/21200$ , **(E)**  $1/20800$ .

- 13)** Quanti sono i numeri interi maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 100 che sono uguali al quadrato del numero dei propri divisori positivi? (Attenzione: tra i divisori di un numero vi sono anche 1 ed il numero stesso).  
**(A)** 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

- 14)** Quanti numeri reali  $x$  risolvono l'equazione  $|x - 2| - 4 = 1/|x - 3|$ ?  
**(A)** nessuno, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** più di quattro.

- 15)** Nella figura qui a fianco, quanto misura l'angolo  $\alpha$ ?  
**(A)**  $70^\circ$ , **(B)**  $75^\circ$ , **(C)**  $80^\circ$ , **(D)**  $90^\circ$ , **(E)** non può essere determinato coi soli dati forniti.

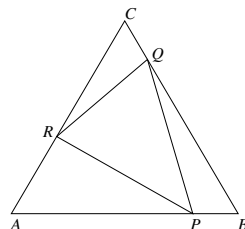


- 16)** Andrea non ha fatto gli esercizi per casa e per punizione la maestra gli assegna come compito quello di scrivere sul quaderno tutti i numeri compresi tra 1 e 2005, estremi inclusi (ogni numero deve essere scritto una sola volta). Quante volte Andrea dovrà scrivere la cifra 1?  
**(A)** 1490, **(B)** 1491, **(C)** 1600, **(D)** 1601, **(E)** 1610.

- 17)** Un gruppo di ragazze e ragazzi, 24 in totale, partecipa ad un banchetto e siedono tutti intorno ad un tavolo rotondo. Ogni ragazza dice: "Seduto al mio fianco c'è un ragazzo". Sapendo che il numero di ragazze è il doppio di quello dei ragazzi, quante ragazze hanno certamente mentito?  
**(A)** 0, **(B)** 4, **(C)** 8, **(D)** 16, **(E)** non è possibile rispondere in base ai soli dati forniti.

- 18)** Il polinomio  $p$  è definito da  $p(x) = ax^{2005} + x + b$ , con  $a$  e  $b$  numeri reali. Per quali valori di  $a$  e  $b$  si ha che  $p(x+1) - p(x-1) = p(x)$  per ogni valore reale di  $x$ ?  
**(A)**  $a = 0, b = 2$ , **(B)**  $a$  qualunque e  $b = 0$ , **(C)**  $a = 1$  e  $b$  qualunque,  
**(D)**  $a = b = 0$ , **(E)** per nessun valore di  $a$  e  $b$ .

- 19)** Il triangolo  $ABC$  in figura è equilatero e ha lato 5 m. Sapendo che  $AP = 4$  m,  $BQ = 4$  m,  $CR = 3$  m, calcolare il rapporto tra l'area del triangolo  $PQR$  e l'area del triangolo  $ABC$ .  
**(A)**  $\frac{2}{5}$ , **(B)**  $\frac{9}{25}$ , **(C)**  $\frac{11}{20}$ , **(D)**  $\frac{3}{7}$ , **(E)** nessuna delle precedenti.



- 20)** Una successione di numeri  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ha questa proprietà: i primi due termini sono uguali a 1:  $a_0 = a_1 = 1$ , e, per ogni  $n$  maggiore o uguale a uno,

$a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$  (quindi, ad esempio,  $a_2 = 1(a_1 + a_0) = 1 \cdot 2 = 2$ ). Con quale cifra termina  $a_{2005}$ ?

- (A)** 0, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 6, **(E)** 8.

- 21)** Quattro bambine, Alice, Bianca, Cecilia e Daniela, decidono di comprare un palloncino a testa da un venditore che ha solo palloncini rossi e blu. Compreranno il palloncino una dopo l'altra: prima Alice, poi Bianca, poi Cecilia e infine Daniela. Bianca dice: "Se Alice lo comprerà rosso, anch'io lo comprerò rosso". Cecilia dice: "Io lo comprerò dello stesso colore di Bianca". Daniela dice: "Se Alice lo comprerà blu, io lo comprerò dello stesso colore di Cecilia". Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

- (A)** È impossibile che quattro bambine comprino un palloncino rosso, **(B)** almeno tre bambine compreranno un palloncino dello stesso colore, **(C)** Daniela e Bianca compreranno un palloncino dello stesso colore, **(D)** almeno due bambine compreranno un palloncino rosso, **(E)** nessuna delle precedenti affermazioni è sicuramente vera.

- 22)** Tra i triangoli rettangoli di area  $6 \text{ m}^2$  quello di perimetro minimo ha l'ipotenusa di lunghezza  
**(A)** 3 m, **(B)**  $3\sqrt{3}$  m, **(C)**  $2\sqrt{6}$  m, **(D)**  $4\sqrt{3}$  m, **(E)** nessuna delle precedenti.

- 23)** Quante parole (anche prive di senso compiuto) di quattro lettere si possono scrivere utilizzando solo le lettere  $A, B, E, M, O$  in modo che nessuna delle lettere successive ad una  $B$  (andando da sinistra verso destra) sia una  $M$ ? (Quindi, ad esempio,  $ABEB$  deve essere contata ma  $OBAM$  no).  
**(A)**  $4^3 \cdot 5$ , **(B)**  $4^2 \cdot 5^2$ , **(C)**  $4 \cdot 5^3$ , **(D)**  $2^9$ , **(E)**  $5^4$ .

- 24)** Un tetraedro regolare il cui spigolo misura  $6\sqrt{3}$  cm è appoggiato su di un piano  $p$  (cioè una faccia è contenuta in  $p$ ); indichiamo con  $V$  il vertice che non appartiene a  $p$ . Il tetraedro viene ruotato di  $90^\circ$  mediante una rotazione che ha per asse la retta che contiene uno degli spigoli che poggiano su  $p$ . Calcolare a quale distanza dal piano  $p$  si trova il vertice  $V$  dopo la rotazione.

- (A)**  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  cm, **(B)**  $\frac{2}{3}$  cm, **(C)** 3 cm, **(D)**  $3\sqrt{3}$  cm, **(E)** nessuna delle precedenti.

- 25)** Sia

$$x = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2004 \cdot 2006}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2003 \cdot 2005}.$$

Allora:

- (A)**  $x < \sqrt[4]{2006}$ , **(B)**  $\sqrt[4]{2006} < x < \sqrt[3]{2006}$ , **(C)**  $\sqrt[3]{2006} < x < \sqrt{2006}$ ,  
**(D)**  $\sqrt{2006} < x < 2006$ , **(E)**  $x > 2006$ .