PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Biennio

23 novembre 2005

1) La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è un'ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*

1) Quante cifre ha il numero $2^3 \cdot 5^4 \cdot 10^5$?
(A) Sei, **(B)** sette, **(C)** otto, **(D)** nove, **(E)** nessuna delle precedenti.

2) $\sqrt{12^{12}}$ è uguale a:
(A) 6^6, **(B)** $12^{2\sqrt{3}}$, **(C)** $2^{12}\,3^6$, **(D)** 6^{12}, **(E)** nessuno dei numeri precedenti.

3) Qual è il valore massimo che può assumere il numero $a(b+c) - b(a+c)$ quando a, b e c sono numeri interi distinti tra loro, maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 10?
(A) 80, **(B)** 81, **(C)** 84 **(D)** 90, **(E)** 100.

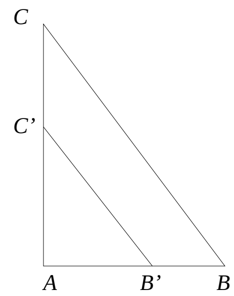
4) La nonna Lucia ha portato un cestino con 120 ciliege ai suoi tre nipoti, Jacopo di 4 anni, Martino di 7 anni e Duccio di 9 anni. La nonna distribuisce tutte le ciliege ai nipoti secondo questo criterio: dà a ciascun nipote un numero di ciliege ottenuto moltiplicando l'età del nipote per un certo fattore, e questo fattore è lo stesso per tutti e tre i nipoti. Quante ciliege vengono date a Jacopo?
(A) 20, **(B)** 21, **(C)** 22, **(D)** 23, **(E)** 24.

5) Un atollo ha la forma di una corona circolare delimitata da due circonferenze concentriche di raggi 1 km e 6 km rispettivamente. Giovanni e Marco sono i soli abitanti dell'atollo; dopo un temporale che ha distrutto le loro capanne, essi decidono di ricostruirle il più lontano possibile l'una dall'altra, in modo però che esista un percorso rettilineo che le congiunge e che giace interamente sull'atollo. Quanto disteranno tra loro le capanne di Giovanni e Marco? (Supponete che le due circonferenze che delimitano l'atollo facciano parte di esso).
(A) $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ km, **(B)** $\dfrac{\sqrt{37}}{2}$ km, **(C)** $\sqrt{37}$ km, **(D)** $2\sqrt{35}$ km, **(E)** $2\sqrt{37}$ km.

6) Una stanza rettangolare ha le pareti rivolte nelle direzioni dei quattro punti cardinali e ci sono quattro porte d'accesso. Tre persone si trovano nella stanza e fanno le seguenti affermazioni. Prima persona: "Non ci sono porte sulla parete Sud". Seconda persona: "Ci sono porte solo sulla parete Nord". Terza persona: "Su ogni parete c'è al massimo una porta". Che cosa si può dire per certo delle affermazioni fatte?
(A) L'affermazione fatta dalla prima persona è vera, **(B)** l'affermazione fatta dalla seconda persona è vera, **(C)** l'affermazione fatta dalla terza persona è vera, **(D)** almeno una affermazione è falsa, **(E)** non si può dire niente di certo sulle affermazioni fatte.

7) Alla fine di un campionato di calcio a 20 squadre (in cui ogni squadra gioca contro ogni altra squadra esattamente due partite) i Matematici hanno vinto 19 partite, ne hanno pareggiate 12 e ne hanno perse 7. L'allenatore osserva che si ha 19=12+7. Per una generica squadra del campionato indichiamo con (v, n, p) la terna formata dal numero di vittorie, pareggi e sconfitte rispettivamente, ottenuti nel campionato. Per quante terne distinte può accadere che $v = n + p$? (Attenzione: le terne sono ordinate, quindi, ad esempio, $(19, 12, 7)$ e $(19, 7, 12)$ sono da considerarsi distinte).
(A) 19, **(B)** 20, **(C)** 38, **(D)** 40, **(E)** nessuna delle precedenti.

8) Il triangolo ABC è rettangolo ed i cateti AB e AC misurano 3 m e 4 m rispettivamente. Siano B' e C' punti appartenenti ai lati AB e AC rispettivamente, tali che la retta contenente il segmento $B'C'$ sia parallela a quella contenente il segmento BC e distante 1 m da essa (vedi figura). Calcolare l'area del triangolo $AB'C'$.
(A) $\dfrac{49}{24}$ m^2, **(B)** 2 m^2, **(C)** $\dfrac{65}{24}$ m^2, **(D)** $\dfrac{7}{2}$ m^2, **(E)** nessuna delle precedenti.



9) Comunque si prenda un numero naturale n, il numero $(n+2)(n+3)(2n+5)$ è divisibile per:
(A) 4, **(B)** 6, **(C)** 9, **(D)** 10, **(E)** 15.

10) Per quante coppie ordinate (a, b) di numeri interi accade che il loro prodotto sia uguale alla loro somma?
(A) Nessuna, **(B)** una, **(C)** due, **(D)** quattro, **(E)** più di quattro.

11) Fabio ritrova un vecchio lucchetto a combinazione; per aprire il lucchetto bisogna allineare nell'ordine giusto tre cifre, ciascuna delle quali può variare da 0 a 9. Fabio non ricorda la combinazione corretta, ma è sicuro che la somma delle tre cifre sia 10. Quanti tentativi dovrà fare, al massimo, per trovare la combinazione corretta?
(A) 61, **(B)** 63, **(C)** 65, **(D)** 67, **(E)** 69.

12) In un triangolo, per ogni coppia di lati consecutivi, i due assi dei lati e la bisettrice dell'angolo formato dai due lati si incontrano in uno stesso punto. Possiamo affermare che:
(A) non esiste un triangolo con questa proprietà, **(B)** il triangolo è equilatero, **(C)** il triangolo ha un angolo di 30°, **(D)** il triangolo è rettangolo, **(E)** il triangolo ha un angolo di 45°.

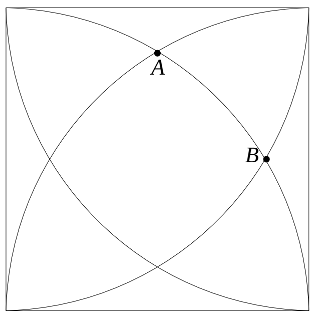
13) Quanti sono i numeri interi maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 100 che sono uguali al quadrato del numero dei propri divisori positivi? (Attenzione: tra i divisori di un numero vi sono anche 1 ed il numero stesso).
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.

14) Per ogni numero intero n compreso tra 10 e 99, estremi inclusi, si sommano il prodotto delle sue cifre e la somma delle sue cifre, ottenendo così un nuovo numero $S(n)$. Per quanti n accade che $S(n) = n$?
(A) 8, **(B)** 9, **(C)** 10, **(D)** 11, **(E)** 12.

15) Due cerchi hanno raggi lunghi 1 m e 3 m rispettivamente. Sapendo che esistono due rette ortogonali tra loro, ciascuna tangente ad entrambi i cerchi, qual è il minimo valore possibile della distanza tra i due centri?
(A) $\sqrt{2}$ m, **(B)** $2\sqrt{2}$ m, **(C)** $(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ m, **(D)** $2\sqrt{5}$ m, **(E)** $4\sqrt{2}$ m.

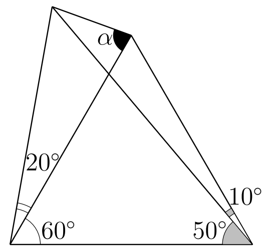
16) Andrea non ha fatto gli esercizi per casa e per punizione la maestra gli assegna come compito quello di scrivere sul quaderno tutti i numeri compresi tra 1 e 2005, estremi inclusi (ogni numero deve essere scritto una sola volta). Quante cifre dovrà scrivere in tutto Andrea?
(A) 6900, **(B)** 6903, **(C)** 6910, **(D)** 6913, **(E)** 6923.

17) Nel quadrato in figura sono stati disegnati i quattro archi di circonferenza, ciascuno avente centro in uno dei vertici del quadrato e raggio pari al lato del quadrato, che misura 10 m. Quanto vale la distanza tra i punti A e B?
(A) $3(\sqrt{6}-1)$ m, **(B)** 5 m, **(C)** $5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ m, **(D)** $8(\sqrt{3}-1)$ m, **(E)** nessuna delle precedenti.



18) In un grande ufficio ci sono 84 impiegati, ciascuno dei quali conosce almeno una lingua tra l'inglese e il tedesco; inoltre, il 20% di coloro che parlano l'inglese parla anche il tedesco, e l'80% di coloro che parlano il tedesco parla anche l'inglese. Quanti sono gli impiegati di quell'ufficio che conoscono entrambe le lingue?
(A) 12, **(B)** 14, **(C)** 15, **(D)** 16, **(E)** 18.

19) Nella figura qui a fianco, quanto misura l'angolo α?
(A) 70°, **(B)** 75°, **(C)** 80°, **(D)** 90°, **(E)** non può essere determinato coi soli dati forniti.



20) In ciascuna delle seguenti catene di disuguaglianze compaiono gli stessi cinque numeri; quale di esse è completamente vera?
(A) $2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{2^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2}$, **(B)** $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$,
(C) $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$, **(D)** $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$,
(E) $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$.