

## I Giochi di Archimede - Gara Biennio

Dedicati alla memoria di Franco Conti

19 novembre 2003

- 1) La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
- 2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
- 3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
- 4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Classe \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

- 1) Quanto fa  $0,032/0,8$ ?  
(A) 0,0004 (B) 0,004 (C) 0,04 (D) 0,4 (E) 400.
- 2) Qual è il più grande degli interi positivi  $n$  tali che la media aritmetica dei numeri da 1 a  $n$  sia  $< 2003$ ?  
(Nota: la media aritmetica di  $n$  numeri è uguale alla loro somma divisa per  $n$ .)  
(A) 2002 (B) 2003 (C) 4003 (D) 4004 (E) 4005.
- 3) Sia dato un quadrato  $ABCD$  di lato unitario e sia  $P$  un punto interno ad esso tale che l'angolo  $\hat{APB}$  misuri  $75^\circ$ . La somma delle aree dei triangoli  $ABP$  e  $CDP$  è:  
(A) 1 (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D) non si può determinare  
(E) nessuna delle precedenti è corretta.
- 4) Si vogliono colorare le nove caselle di una scacchiera  $3 \times 3$  in modo tale che ogni riga, ogni colonna e ognuna delle due diagonali non contengano più caselle dello stesso colore. Qual è il minimo numero di colori necessario?  
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7.

- 5) Un gelataio prepara 20 kg di gelato e lo rivende nel corso della giornata in coni piccoli da 1,20 € di due palline e coni grandi da 1,60 € di tre palline. Da ogni kg di gelato ha ricavato 12 palline; alla fine della giornata, ha incassato in totale 137,60 €. Quanti coni grandi ha venduto?  
(A) 17 (B) 24 (C) 32 (D) 43 (E) 50.
- 6) Un venditore di palloncini ha a disposizione due bombole di elio uguali e dei palloncini piccoli e grandi. Utilizza tutta la prima bombola per gonfiare 80 palloncini piccoli, tutti alla stessa pressione. Considerato che da gonfi i palloncini grandi hanno la stessa forma e la stessa pressione dei piccoli, ma una superficie 4 volte più grande, quanti palloncini grandi può riempire con la seconda bombola?  
(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 24 (E) 40.
- 7) Ogni anno, al momento del pagamento delle tasse, l'utente fa una dichiarazione relativa all'anno in corso. Se la dichiarazione è vera, deve pagare le tasse; se è falsa, non le paga. Un giovane matematico, che ritiene il sistema iniquo, trova il modo di bloccarlo, con una delle seguenti dichiarazioni: quale?  
(A) "I pesci vivono in acqua" (B) "Io vivo in acqua"  
(C) "I pesci non pagano le tasse" (D) "Io non pago le tasse"  
(E) "Io pago le tasse".
- 8) Il numero  $\frac{1}{(3 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{3})}$  è:  
(A) Intero (B) razionale positivo, ma non intero  
(C) razionale negativo, ma non intero  
(D) irrazionale positivo (E) irrazionale negativo.
- 9) Un parallelogramma di lati 1 e 2 ha un angolo di  $60^\circ$ . Quanto misura la sua diagonale minore?  
(A)  $\sqrt{2}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $2\sqrt{2}$  (D)  $2\sqrt{3}$  (E)  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .
- 10) Il più grande numero primo palindromo con un numero pari di cifre ha  
(A) 2 cifre (B) 4 cifre (C) 10 cifre  
(D) non esistono numeri con queste proprietà  
(E) esistono numeri grandi a piacere con queste proprietà.  
Nota: un numero si dice palindromo se può essere letto indifferentemente da sinistra a destra o da destra a sinistra. Per esempio, 141 e 2552 sono palindromi, mentre 1231 non lo è.
- 11) Un parallelepipedo a base quadrata è inscritto in una sfera. Se il lato di base è  $\frac{1}{4}$  dell'altezza, quanto vale il rapporto tra la superficie della sfera e la superficie totale del parallelepipedo?  
(A)  $\pi$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $2\pi$  (D)  $\frac{\pi}{2}$  (E) dipende dal raggio della sfera.

12) Quattro ragazzi vogliono telefonare tutti contemporaneamente alle rispettive ragazze. Ogni cellulare può funzionare su quattro frequenze distinte. Se due cellulari si attivano sulla stessa frequenza la comunicazione cade. Se ogni ragazzo non sa che frequenza scelgono gli altri tre, qual è la probabilità che tutti e quattro riescano a parlare con le loro ragazze?

- (A)  $\frac{3}{32}$  (B)  $\frac{3}{64}$  (C)  $\frac{1}{256}$  (D)  $\frac{1}{16}$  (E)  $\frac{9}{128}$ .

13) Giulio vuole stupire Damiano con le sue capacità divinatorie. Per questo gli fornisce un elenco di alcuni numeri di due cifre e gli dice di sceglierne uno. Giulio chiede a Damiano la somma delle cifre del numero, ed è così sicuro di poterlo indovinare. Al massimo da quanti numeri era composto l'elenco iniziale?

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 17 (E) 18.

14) In questo rettangolo c'è esattamente una affermazione falsa.  
 In questo rettangolo ci sono esattamente due affermazioni false.  
 In questo rettangolo ci sono esattamente tre affermazioni false.  
 In questo rettangolo ci sono esattamente quattro affermazioni false.

Quante affermazioni vere ci sono nel rettangolo?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

15) Quanti sono i numeri interi positivi  $n$  per i quali  $8n + 50$  è un multiplo di  $2n + 1$ ?

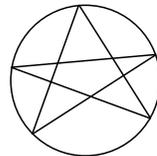
- (A) Nessuno (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 10.

16) Se  $p, q, r$  sono tre numeri reali,  $p \times (q + r) = (p \times q) + (p \times r)$  è sempre vero. In quali casi si ha anche  $p + (q \times r) = (p + q) \times (p + r)$ ?

- (A) Se e solo se  $p = q = r = \frac{1}{3}$  oppure  $p = 0$  (B) se e solo se  $p = q = r$   
 (C) mai (D) se e solo se  $p + q + r = 1$  oppure  $p = 0$   
 (E) se e solo se  $p = q = r = 0$ .

17) Sia data una stella a cinque punte inscritta in una circonferenza. Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella?

- (A)  $100^\circ$  (B)  $150^\circ$  (C)  $180^\circ$  (D)  $200^\circ$   
 (E) i dati a disposizione sono insufficienti.



18) Sono dati 6 punti disposti come nella figura a fianco. Quanti sono i possibili triangoli non degeneri che hanno i vertici in tre dei punti dati?

- (A) 12 (B) 15 (C) 16 (D) 18 (E) 24.



19) Giovanni ha bevuto troppo e comincia a camminare in modo strano:

- fa 1 passo in avanti;
- poi si volta di  $90^\circ$  verso destra e fa 2 passi in avanti;
- poi si volta di  $90^\circ$  verso destra e fa 1 passo in avanti;

- poi si volta di  $90^\circ$  verso sinistra e fa 1 passo all'indietro;
- dopo di che ricomincia da capo.

Ogni passo è di 1 metro. Dopo 186 passi cade a terra svenuto. A quanti metri da dove era partito finisce la passeggiata di Giovanni?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D)  $\sqrt{5}$  (E) 4.

20) Dette  $a$  e  $b$  le aree delle figure in grigio, dire quale fra le seguenti relazioni è valida (tutti i cerchi piccoli hanno lo stesso raggio  $r$ , e i 4 tangenti a quello grande hanno i centri sui vertici di un quadrato).

- (A)  $a < b$ , qualunque sia  $r$  (B)  $a = b$ , qualunque sia  $r$   
 (C)  $a > b$ , qualunque sia  $r$   
 (D)  $a < b$  oppure  $a = b$ , dipende dal valore di  $r$   
 (E)  $a > b$  oppure  $a = b$ , dipende dal valore di  $r$ .

