# *I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio*

5 dicembre 2000

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | B | D | B | D | E | C | A | B | C | B | B | D | A | D | A | D | C | D | C |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

1) La risposta è (C)
Il venditore guadagna 80 – 70 Euro dalla prima vendita e 100 – 90 Euro dalla seconda vendita. Il suo guadagno totale sarà quindi 10 + 10 Euro.

2) La risposta è (B)
Detto $r$ il raggio del cerchio interno, la sua area vale $\pi r^2$. L'area della regione ombreggiata sarà $\pi(2r)^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$ e il rapporto fra le due aree richieste sarà quindi $\frac{3\pi r^2}{\pi r^2} = 3$.

3) La risposta è (D)
Basta accoppiare il primo numero con l'ultimo, il secondo con il penultimo e così via, fino a ottenere 1000 coppie. Visto che la somma di due numeri di una coppia è 2001 avremo che la somma di tutti i numeri è $S = 2001 \times 1000$. Pertanto la media aritmetica è $S/2000 = 2001/2 =$ 1000,5.

4) La risposta è (B)
Infatti $2(3a - 2) = 2(2b - 1)$ da cui $6a - 4 = 4b - 2$, cioè $6a = 4b + 2$.

5) La risposta è (D)
Chiamiamo $b$ la base del rettangolo e $h$ la sua altezza. Aumentando base e altezza rispettivamente del 30% e del 50% l'area diventerà

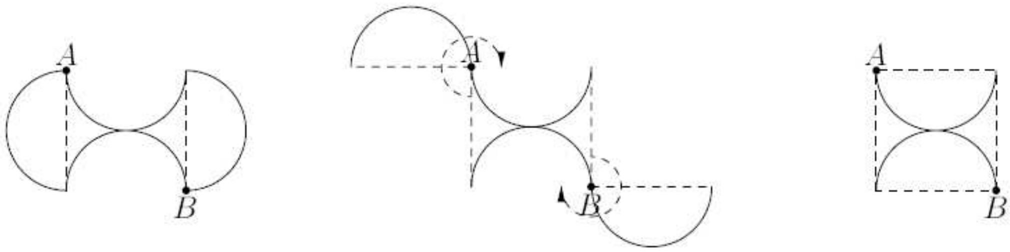
$$\left(1+\frac{30}{100}\right)b\times\left(1+\frac{50}{100}\right)h = \left(1+\frac{30}{100}+\frac{50}{100}+\frac{1500}{10000}\right)bh = \left(1+\frac{95}{100}\right)bh\,.$$

Pertanto l'area aumenterà del 95%.

6) La risposta è (E)
L'ottagono regolare ha 8 assi di simmetria, 4 passanti per 2 vertici opposti e altri 4 passanti per i punti medi di due lati opposti. I quattro assi del primo tipo non sono assi di simmetria di tutta la figura, perché nessuno dei quadrati costruiti sui lati ha un quadrato simmetrico rispetto a tali assi. I quattro assi del secondo tipo non sono neppure essi assi di simmetria di tutta la figura, perché le due diagonali dell'ottagono tracciate nella figura data non hanno le corrispondenti simmetriche. Quindi non c'è nessun asse di simmetria.

7) La risposta è (C)
Poiché i recipienti devono essere tutti uguali, la loro capacità in litri deve essere un divisore di 24, 32 e 40 e quindi non può superare il massimo comune divisore di questi numeri, che è 8. Il minimo numero di recipienti si ottiene quando la loro capacità è la massima possibile, e quindi uguale a 8 litri. Utilizzando recipienti di 8 litri, il grossista utilizzerà $3 + 4 + 5 = 12$ recipienti al mese, e quindi il negoziante riceverà $12 \times 12 = 144$ recipienti in un anno.

8) La risposta è (A)
Scomponendo la figura data seguendo le linee tratteggiate e ricomponendola ruotando i due semicerchi in senso orario di 270° intorno ad $A$ e $B$ rispettivamente (vedi figure sottostanti), si ottiene un quadrato avente il lato lungo 10 cm la cui area, equivalente a quella della figura data, è 100 $cm^2$.




9) La risposta è (B)
Un periodo di 53 ore e 53 minuti equivale a 2 giorni, 5 ore e 53 minuti. Pertanto per calcolare quando si è svegliato Emanuele basta togliere 5 ore e 53 minuti alle 11:11. Il modo più comodo per eseguire tale calcolo è di togliere 6 ore e poi aggiungere 7 minuti. Si ottiene così facilmente che l'ora richiesta è data dalle 5:18.

10) La risposta è (C)
La lunghezza richiesta può essere ottenuta sommando i perimetri dei due esagoni regolari (12 quello del più grande e 6quello del più piccolo) alla lunghezza di 3 delle diagonali dell'esagono grande, ciascuna delle quali misura 4. In totale, $12 + 6 + 3 \cdot 4 = 30$.

11) La risposta è (B)
Dopo 3 ore, il podista avrà percorso 27 km. Poiché 26 km corrispondono all'andata e ritorno fra $A$ e $B$, egli si troverà a 1 km da $A$. Nello stesso tempo, il ciclista avrà percorso 75 km, tre in meno rispetto a tre volte l'andata e ritorno fra $A$ e $B$, perciò egli si troverà a 3 km da $A$. La loro distanza sarà dunque di $3 – 1 = 2$ km.

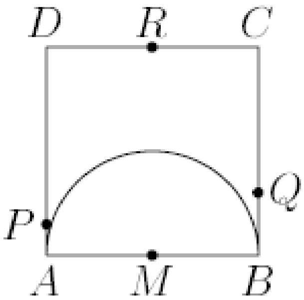
12) La risposta è (B)
Infatti il volume del nuovo deposito è $(125 + 218)\ m^3 = 343\ m^3$ e quindi il lato misurerà $\sqrt[3]{343}$ m = 7 m.

13) La risposta è (D)
Quest'anno il prezzo della mascotte è aumentato di 1,8 Euro, Visto che tale aumento dipende unicamente dal raddoppio del prezzo delle materie prime, ne deduciamo che l'anno scorso le materie prime costavano 1,8 Euro, e dunque quest'anno costano 1,8 Euro.

14) La risposta è (A)
Il numero di combinazioni del tipo $xxy$ con $y$ diverso da $x$ è $10 \times 9$ (10 scelte per la cifra $x$ e, per ciascuna di esse, 9 scelte per la cifra y), ed è uguale al numero di combinazioni del tipo $yxx$. Pertanto le combinazioni sono in tutto 180.

15) La risposta è (D)
E' immediato verificare che 4 irrigatori sono sufficienti, basta collocarli nei punti medi dei lati. Per vedere che 3 irrigatori non sono sufficienti, osserviamo innanzitutto che ogni irrigatore può coprire solo i punti di un cerchio di raggio 10 m, in particolare, due punti distanti tra loro più di 20 m non possono essere coperti dallo stesso irrigatore. Poiché i vertici del quadrato sono 4, se tre irrigatori fossero sufficienti, ci sarebbero due vertici del quadrato, $A$ e $B$, coperti da uno stesso irrigatore, inoltre $A$ e $B$ dovrebbero essere adiacenti

(due vertici opposti hanno una distanza di $20\sqrt{2} > 20$ m) ed il punto di irrigazione dovrebbe coincidere con il punto medio *M* del segmento *AB*. Con riferimento alla figura sotto, l'irrigatore posto nel punto *M* coprirà i punti del semicerchio di centro M e raggio 10. Poiché i punti *P* su *AD* distante 1 m da *A*, *Q* su *BC* distante 2 m da *B* e *R* punto medio di *CD* non appartengono a questo semicerchio ed hanno, a due a due, distanza maggiore di 20, sono necessari almeno altri tre irrigatori distinti per coprire questi 3 punti.




16) La risposta è (A)

Detti *x* il lato di base noto e *y* quello incognito del parallelepipedo, *h* il livello dell'acqua e *V* il volume versato, si ha che il lato di base incognito è $y = \frac{V}{h \cdot x}$ da cui $y = \frac{40\,\text{cm}}{5\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}}$ = 2 cm. Si ha poi $V' = x' \cdot y \cdot h'$ da cui V' = 6 cm · 2 cm · 15 cm = 180 cm$^3$.

17) La risposta è (D)

Siano A, B, C, D, E, F i vertici dell'esagono, in senso antiorario. Si scelga un vertice a caso. Per simmetria, possiamo supporre che questo vertice sia A. Per formare un triangolo equilatero con A, gli altri due vertici devono essere necessariamente C ed E. La probabilità che il secondo vertice sia uno di essi è $\frac{2}{5}$; la probabilità che il terzo vertice sia il vertice restante è $\frac{1}{4}$. Pertanto la probabilità richiesta è $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

SECONDA SOLUZIONE

Le possibilità di scegliere 3 vertici a caso sono uguali al numero di sottoinsiemi di 3 elementi di un insieme di 6 elementi, e cioè $\binom{6}{3} = 20$. Le possibilità che essi formino un triangolo equilatero sono soltanto 2, e cioè che i vertici siano *A*, *C*, *E* oppure *B*, *D*, *F*. Quindi il numero di casi favorevoli diviso per il numero di casi possibili è $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

18) La risposta è (C)

Chiara non può essere arrivata prima, perché almeno una fra Anna e Barbara mente. Chiara non può essere arrivata seconda, perché in questo caso dovrebbe essere arrivata prima di almeno una fra Anna e Barbara, quindi sia lei che una di queste due direbbe la verità, contro le ipotesi. Pertanto Chiara mente, ma allora non può essere arrivata ultima, poiché o Anna o Barbara dice la verità. Ne segue che Chiara è arrivata terza. Osserviamo che, se Anna e Barbara sono arrivate una prima di Chiara e l'altra dopo, le ipotesi sono comunque verificate. Pertanto non si può stabilire né chi è arrivata prima, né chi è arrivata seconda, né chi è arrivata ultima.

19) La risposta è (D)

Gli spigoli $AC$ e $BC$, così come gli spigoli $AD$ e $BD$, insieme con $AB$ formano un triangolo. Pertanto $AC + BC > 54$ e $AD + BD > 54$. Poiché la somma di 20 con qualsiasi fra i numeri 32, 32, 29, 27 è inferiore a 54, lo spigolo di lunghezza 20 non può essere nessuno fra $AC$, $BC$, $AD$, $BD$, e quindi deve essere $CD$ (lo spigolo opposto ad $AB$).

SECONDA SOLUZIONE

Per dimostrare che il lato $CD$ è lungo 20, dimostriamo che nessun altro lato del tetraedro può essere lungo 20. Se infatti così fosse, il lato lungo 20 avrebbe un estremo in comune con il lato $AB$ (osserviamo che $CD$ è l'unico lato del tetraedro a non avere estremi in comune con $AB$). Ma allora ci sarebbe una faccia del tetraedro con un lato lungo 54, un lato lungo 20, ed un lato la cui lunghezza può essere 32, 29 o 27. Ma questo non è possibile visto che in ogni triangolo il lato più lungo deve essere maggiore della somma degli altri due.

OSSERVAZIONE

Per convincersi dell'esistenza di un tetraedro con le misure date si può fare la seguente costruzione. Consideriamo un triangolo $ABC$ di lati $AB$ =54, $AC$ =32, $BC$ = 27, ed il triangolo $ABD$ di lati $AB$ = 54, $AD$ = 32, $BD$ = 29. Supponiamo inoltre che $C$ e $D$ stiano in semipiani diversi rispetto alla retta $AB$. Con qualche calcolo (non semplicissimo) si vede che in tale configurazione la distanza tra $C$ e $D$ è > 20. Supponiamo ora di ruotare nello spazio di 180 gradi il triangolo $ABD$ intorno alla retta $AB$. Alla fine il punto $D$ si sarà spostato in un punto $D'$, situato dalla stessa parte di $C$ rispetto alla retta $AB$. In tale configurazione si ha (con qualche calcolo) che $CD' < 20$. Pertanto durante la rotazione deve esistere una posizione in cui la distanza tra $C$ e $D$ è esattamente 20. In tale posizione i punti $ABCD$ determinano il tetraedro cercato.

20) La risposta è (C)

Le ragazze sono il 40%, i non castani il 40%, i maggiorenni il 10%. Anche se non vi fosse nessuna sovrapposizione, il totale arriverebbe al 90% e avanzerebbe il 10% di maschi minorenni castani. D'altra parte, le affermazioni (A), (B), (D) ed (E) possono essere false, come si può vedere dal seguente esempio di una scuola con 1000 studenti:

se nella scuola ci sono 400 ragazze, tutte minorenni e bionde, e 600 ragazzi tutti castani, di cui 500 minorenni e 100 maggiorenni, tutte le affermazioni riportate nel testo sono vere, ma le (A), (B), (D), (E) sono false.