

# I Giochi di Archimede - Gara Triennio

1 dicembre 1999

- La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
- Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
- Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
- Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Classe \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

- In un frutteto rettangolare c'è un albero ogni 4 metri (come in figura). Sapendo che ci sono 35 alberi, quanto misura il perimetro del rettangolo che ha per vertici i punti in cui ci sono gli alberi A, B, C, D?  
(A) 70 (B) 80 (C) 96 (D) 140  
(E) non si può determinare univocamente.
- Un orologio digitale a 4 cifre indica l'ora da 00:00 a 23:59. Per quanti minuti durante la giornata il numero che indica le ore ed il numero che indica i minuti sono entrambi quadrati perfetti (si ricorda che 0 è un quadrato perfetto)?  
(A) 25 (B) 28 (C) 32 (D) 35 (E) 40.
- Sia  $MNOPQ$  un pentagono in cui  $QM = NO = 8$  cm,  $PQ = 5$  cm,  $OP = 12$  cm e gli angoli in  $M$ ,  $N$  e  $P$  sono retti. Quanto vale il perimetro del pentagono?  
(A) 33 cm (B) 40 cm (C) 46 cm (D) 47 cm (E) 50 cm.
- Quanto vale  $(12,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8 \cdot 10^{111})$ ?  
(A)  $10^{110}$  (B)  $1^{110}$  (C)  $10^{37}$  (D)  $100 \cdot 10^{-333}$  (E)  $1000^{108}$ .

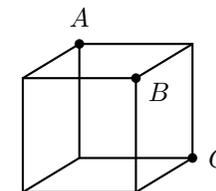
- In un quadrato magico, la somma dei numeri di ogni riga, di ogni colonna e delle due diagonali è costante. Nel quadrato magico a fianco quanto vale  $a + b + c$ ?  
(A) 20 (B) 22 (C) 26 (D) 44 (E) 48.

16	2	$a$
$c$	10	$d$
$b$	$e$	4

- Qual è la probabilità che, estratti due numeri interi a caso (anche uguali) compresi fra 1 e 12 (estremi inclusi), il loro prodotto sia multiplo di 5?  
(A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{11}{36}$  (C)  $\frac{5}{24}$  (D)  $\frac{1}{4}$  (E) nessuna delle precedenti.

- Qual è la cifra delle unità di  $1999^{1999}$ ?  
(A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9 (E) nessuna delle precedenti.

- Dato il cubo in figura, con gli spigoli di lato 1, lo si tagli lungo il piano  $ABC$ . Qual è il volume della parte più piccola così ottenuta?



- (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{6}$  (D)  $\frac{1}{8}$  (E)  $\frac{1}{12}$ .

- Siano  $x$  e  $y$  due numeri reali tali che  $x > y$ . Quali delle seguenti disuguaglianze è sempre verificata?

- (A)  $x^2 > xy$  (B)  $x^2 > y^2$  (C)  $x/y > 1$  (D)  $x^3 > y^3$  (E)  $x^4 > y^4$ .

- Due ciclisti partono contemporaneamente da due punti diametralmente opposti di una pista circolare lunga 400 m. Essi girano nello stesso senso a velocità costante di 35 km/h e 40 km/h rispettivamente. Dopo quanti giri il ciclista più veloce raggiungerà l'altro?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8.

- Scriviamo in ordine crescente tutti i numeri interi positivi che non sono né multipli di 2 né multipli di 3. Quale numero si trova in 1999-esima posizione?

- (A) 1999 (B) 3997 (C) 5995 (D) 11989 (E) nessuno dei precedenti.

- Sui tre lati  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  di un triangolo  $ABC$  si considerino rispettivamente tre punti  $L$ ,  $M$ ,  $N$  tali che  $AL = \frac{1}{2}BL$ ,  $BM = \frac{1}{2}MC$ ,  $CN = \frac{1}{2}NA$ . Qual è il rapporto fra l'area del triangolo  $LMN$  e quella del triangolo  $ABC$ ?

- (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{5}{12}$  (D)  $\frac{1}{2}$

- (E) dipende dal particolare triangolo considerato.

- Sia  $x = 99 - 70\sqrt{2}$ . Allora

- (A)  $x \leq -\frac{1}{100}$  (B)  $-\frac{1}{100} < x < 0$  (C)  $x = 0$  (D)  $0 < x < \frac{1}{100}$

- (E)  $x \geq \frac{1}{100}$ .

- 14) Un orologio analogico ha perso la lancetta dei minuti, ma funziona ancora correttamente. La lancetta delle ore è in corrispondenza del minuto 23. Sapendo che è pomeriggio, che ore sono?  
 (A) Le 15:23 (B) le 16:23 (C) le 16:30 (D) le 16:36 (E) le 16:40.
- 15) Sia  $N$  la somma dei 25 numeri primi più piccoli. La cifra delle unità di  $N$  è uguale a  
 (A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 9 (E) 0.  
 NOTA. Si ricorda che il numero 1 non è considerato primo e che quindi il numero primo più piccolo è 2.
- 16) Quante radici reali possiede l'equazione  $9 - 2^x = 2^{3-x}$ ?  
 (A) Due (B) più di due, ma un numero finito (C) nessuna (D) infinite (E) una.
- 17) Nel mio cassetto ci sono 8 calze blu e 8 calze nere, alla rinfusa. Pescò al buio 8 calze a caso. Quale tra le seguenti è l'eventualità più probabile?  
 (A) Pescare 4 calze di un colore e 4 di un altro  
 (B) pescare 5 calze di un colore e 3 di un altro  
 (C) pescare 6 calze di un colore e 2 di un altro  
 (D) pescare 7 calze di un colore e 1 di un altro  
 (E) pescare 8 calze di un colore e 0 di un altro.
- 18) Quale delle seguenti affermazioni è corretta?  
 (A) Se un quadrilatero ha tutti i lati uguali, allora ha anche tutti gli angoli uguali  
 (B) Se un quadrilatero ha tutti gli angoli uguali, allora ha anche tutti i lati uguali  
 (C) Se un quadrilatero ha due angoli uguali, allora ha anche due lati uguali  
 (D) Esiste un triangolo con tutti gli angoli uguali, ma in cui i lati non sono tutti uguali  
 (E) Esiste un pentagono con tutti gli angoli uguali, ma in cui i lati non sono tutti uguali.
- 19) In quanti modi si possono disporre 3 ragazzi e 3 ragazze per una foto di gruppo, sistemando i 3 ragazzi accovacciati e le 3 ragazze in piedi dietro di loro?  
 (A) 9 (B) 24 (C) 36 (D) 54 (E) 81.
- 20) Sia  $n$  il più piccolo numero intero positivo divisibile per 20 e tale che la somma delle sue cifre sia divisibile per 1999. Quante cifre ha  $n$ ?  
 (A) Meno di 222 (B) 222 (C) 223 (D) 224 (E) più di 224.
- 21) Un quadrato  $ABCD$  è inscritto in una circonferenza di raggio unitario. Qual è la lunghezza del raggio della circonferenza che passa per  $A$  ed è tangente ai lati  $BC$  e  $CD$ ?  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $2(\sqrt{2} - 1)$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\sqrt{2}$  (E)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- 22) Quale dei seguenti numeri non può essere scritto nella forma  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  con  $a$  e  $b$  interi positivi?  
 (A)  $\frac{25}{12}$  (B)  $\frac{10}{3}$  (C)  $\frac{7}{3}$  (D)  $\frac{17}{4}$  (E)  $\frac{29}{10}$ .
- 23) Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti i cavalieri dicono sempre la verità ed i furfanti mentono sempre. Supponi di incontrarvi Andrea che dice "Bruno afferma che Carlo è un furfante, ma Carlo afferma che Diego è un furfante e Diego afferma che Bruno è un furfante". Che cosa puoi dedurre?  
 (A) Bruno, Carlo e Diego sono tutti furfanti  
 (B) Bruno, Carlo e Diego sono tutti cavalieri  
 (C) tra Bruno, Carlo e Diego ci sono due furfanti e un cavaliere  
 (D) tra Bruno, Carlo e Diego ci sono due cavalieri e un furfante  
 (E) Andrea è un furfante.
- 24) L'intero  $n > 0$  in base dieci si scrive solo con le cifre 3 e 5 ed ha un numero dispari di cifre. Inoltre è divisibile per 11. Qual è il minimo numero di cifre che può avere  $n$ ?  
 (A) 5 (B) 7 (C) 11 (D) 15 (E) non esiste un tale  $n$ .
- 25) Le circonferenze disegnate a fianco hanno raggio 2 e 1 e sono tangenti internamente nel punto  $A$ . A che distanza da  $O$  deve essere il punto  $P$  affinché le corde intercettate dalla perpendicolare in  $P$  ad  $OA$  siano di lunghezza una il doppio dell'altra?  
 (A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{2}{3}$  (E)  $\frac{3}{4}$ .

