Prova di Matematica : T. Pitagora – T. Euclide – Disequazioni

14.04.2011
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 C

1. Risolvi le seguenti disequazioni:

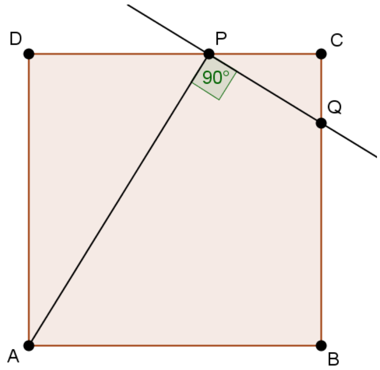
$$\frac{2x+3}{4x+4}-1\le\frac{x-1}{x+1} \qquad \left|\frac{x+1}{x-3}\right|\le 2 \qquad |3x+4|-3|x-1|+2x>15$$

2. Rappresenta graficamente la regione di piano soluzione del seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} x-y<3 \\ y-4<0 \\ x+2y>0 \end{cases}$

3. Problema

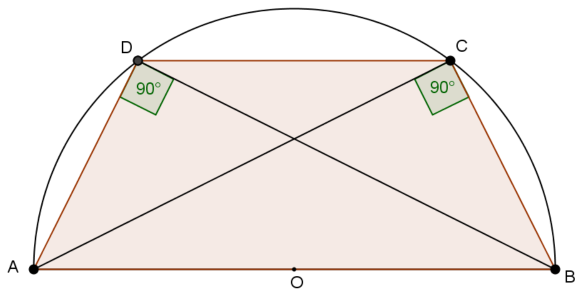
Nel trapezio rettangolo $ABCD$, l'altezza AD misura cm 20 e la base maggiore AB è uguale al doppio del lato obliquo BC. Sapendo che il rapporto fra il lato obliquo e la base minore è $\frac{7}{5}$, determina il perimetro e l'area del trapezio. Preso su AB il punto M tale che $MB = MD$, determina il perimetro e l'area del triangolo AMD.

4. Problema



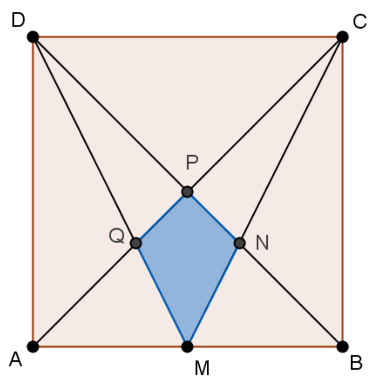
É dato un quadrato $ABCD$, il cui lato misura a. Preso un punto P sul lato CD, traccia la perpendicolare ad AP, che incontra BC in Q. Sapendo che vale $\overline{PD}+\overline{CQ}=\frac{8}{9}a$, determina la distanza di P da D.

5. Problema



Un trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=25a$. Sapendo che $\overline{CD}=7a$, determina la misura del perimetro e l'area del trapezio.

6. Problema



Il lato del quadrato $ABCD$ misura 12 cm . M è il punto medio del lato AB.
Determina l'area del deltoide $MNPQ$.

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6
Punti	30	10	15	15	15	15

Voto	Punteggio grezzo / 10

Soluzione

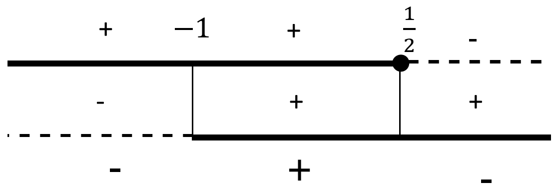
1.a Risolvi la seguente disequazione:

$$\frac{2x+3}{4x+4} - 1 \le \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{2x+3}{4(x+1)} - 1 - \frac{x-1}{x+1} \le 0\,; \qquad \frac{2x+3-4x-4-4x+4}{4(x+1)} \le 0\,; \qquad \frac{-6x+3}{4(x+1)} \le 0\,;$$

$N \ge 0:$ $\quad -6x+3 \ge 0 \quad$ $x \le \frac{1}{2}$

$D > 0:$ $\quad x+1 > 0 \quad$ $x > -1$



La soluzione è pertanto :

$$x < -1 \quad \vee \quad x \ge \frac{1}{2}$$

1.b Risolvi la seguente disequazione:

$$\left|\frac{x+1}{x-3}\right| \le 2$$

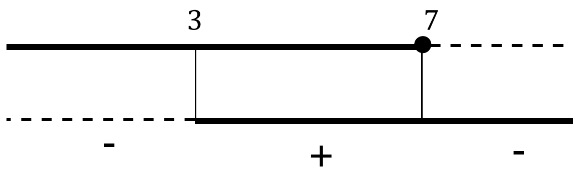
$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} \le 2 \\[2ex] \dfrac{x+1}{x-3} \ge -2 \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione :

$$\frac{x+1}{x-3} \le 2\,; \qquad \frac{x+1}{x-3} - 2 \le 0\,; \qquad \frac{x+1-2x+6}{x-3} \le 0\,; \qquad \frac{-x+7}{x-3} \le 0$$

$N \ge 0:$ $\quad -x+7 \ge 0 \quad$ $x \le 7$

$D > 0:$ $\quad x-3 > 0 \quad$ $x > 3$



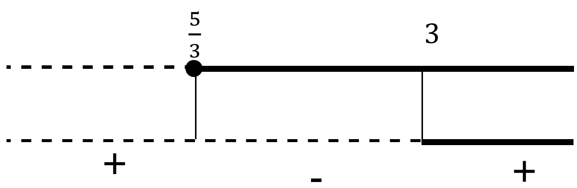
$$x < 3 \quad \vee \quad x \ge 7$$

Risolviamo la seconda disequazione :

$$\frac{x+1}{x-3} \ge -2\,; \qquad \frac{x+1}{x-3} + 2 \ge 0\,; \qquad \frac{x+1+2x-6}{x-3} \ge 0\,; \qquad \frac{3x-5}{x-3} \ge 0$$

$N \ge 0:$ $\quad 3x-5 \ge 0 \quad$ $x \ge \frac{5}{3}$

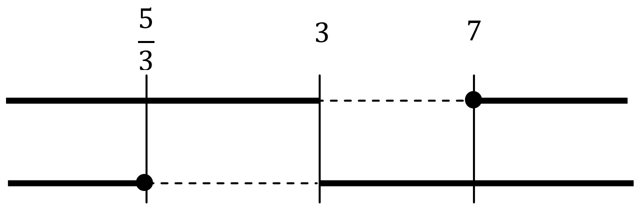
$D > 0:$ $\quad x-3 > 0 \quad$ $x > 3$



$$x \le \frac{5}{3} \quad \vee \quad x > 3$$

Ritornando al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-3} \geq -2 \end{cases}$$



La soluzione è pertanto :

$$x \leq \frac{5}{3} \quad \vee \quad x \geq 7$$

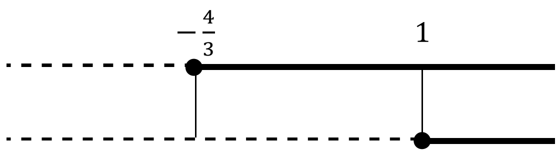
1.c Risolvi la seguente disequazione:

$|3x+4| - 3|x-1| + 2x > 15$

Studiamo i segni dei due valori assoluti:

$3x + 4 \geq 0 \qquad x \geq -\dfrac{4}{3}$

$x - 1 \geq 0 \qquad x \geq 1$



Otteniamo i tre sistemi:

$$\begin{cases} -(3x+4) + 3(x-1) + 2x > 15 \\ x < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} +(3x+4) + 3(x-1) + 2x > 15 \\ -\dfrac{4}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} (3x+4) - 3(x-1) + 2x > 15 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 4 + 3x - 3 + 2x > 15 \\ x < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} 3x + 4 + 3x - 3 + 2x > 15 \\ -\dfrac{4}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x + 4 - 3x + 3 + 2x > 15 \\ x > 1 \end{cases}$$

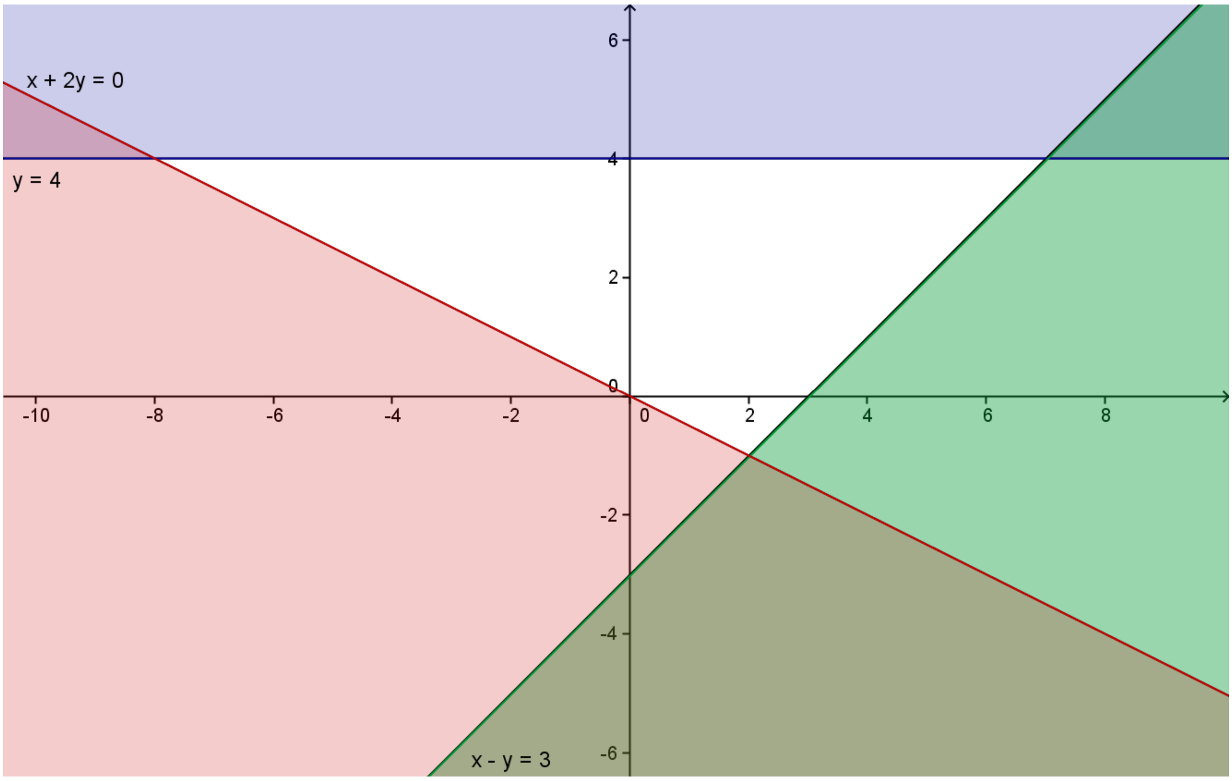
$$\begin{cases} 2x > 22 \\ x < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} 8x > 14 \\ -\dfrac{4}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x > 8 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 11 \\ x < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x > \dfrac{7}{4} \\ -\dfrac{4}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 4 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\emptyset \qquad \cup \qquad \emptyset \qquad \cup \qquad x > 4$$

La soluzione è pertanto: $x > 4$.

2. Rappresenta graficamente la regione di piano soluzione del seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} x - y < 3 \\ y - 4 < 0 \\ x + 2y > 0 \end{cases}$

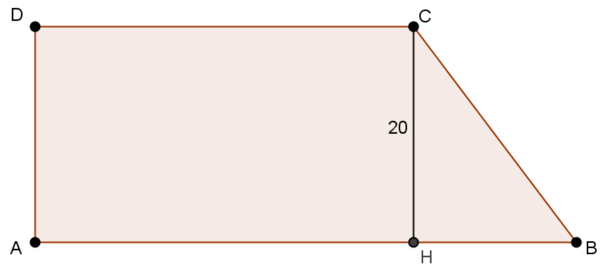


Problema 1

Nel trapezio rettangolo $ABCD$, l'altezza AD misura cm 20 e la base maggiore AB è uguale al doppio del lato obliquo BC. Sapendo che il rapporto fra il lato obliquo e la base minore è $\frac{5}{7}$, determina il perimetro e l'area del trapezio. Preso su AB il punto M tale che $MB = MD$, determina il perimetro e l'area del triangolo AMD.

Soluzione 1^a parte

Il rapporto fra il lato obliquo e la base minore è: $\frac{5}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{5}{7}$



Cioè: $\overline{BC} = \frac{5}{7}\overline{CD}$

Ponendo: $\overline{CD} = x$ si ottiene:

$$\overline{BC} = \frac{5}{7}x$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot \frac{5}{7}x = \frac{10}{7}x$$

$$\overline{BH} = \overline{AB} - \overline{AH} = \frac{10}{7}x - x = \frac{3}{7}x$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo BCH si ha:

$\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{BC}^2$; $\left(\frac{3}{7}x\right)^2 + 20^2 = \left(\frac{5}{7}x\right)^2$; $\frac{9}{49}x^2 + 400 = \frac{25}{49}x^2$; $\frac{16}{49}x^2 = 400$;

$x^2 = \frac{49}{16} \cdot 400$; $x^2 = 1225$; $x = 35$.

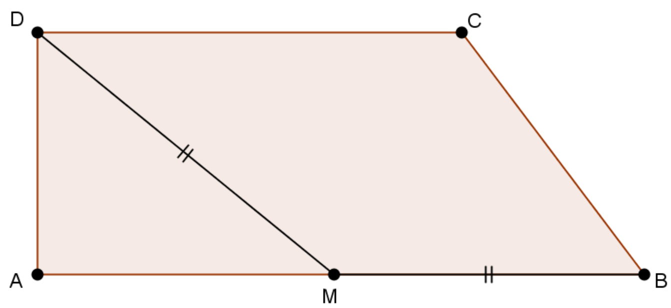
Pertanto: $\overline{CD} = 35\ cm$ $\overline{BC} = \frac{5}{7} \cdot 35 = 25\ cm$ $\overline{AB} = \frac{10}{7} \cdot 35 = 50\ cm.$

Il perimetro del trapezio $ABCD$ è: $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = (50 + 25 + 35 + 20)cm = 130\ cm$.

L'area del trapezio $ABCD$ è: $S = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{(50+35)cm}{2} \cdot 20cm = 850\ cm^2$.

Soluzione 2^a parte

Ponendo: $\overline{BM} = x \quad (0 < x < 50)$ si ottiene:



$\overline{DM} = x \qquad e \qquad \overline{AM} = 50 - x$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo ADM si ha:

$\overline{AM}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{DM}^2$; $(50 - x)^2 + 20^2 = x^2$;
$2500 + x^2 - 100x + 400 = x^2$;

$100x = 2900$; $x = \frac{2900}{100} = 29$

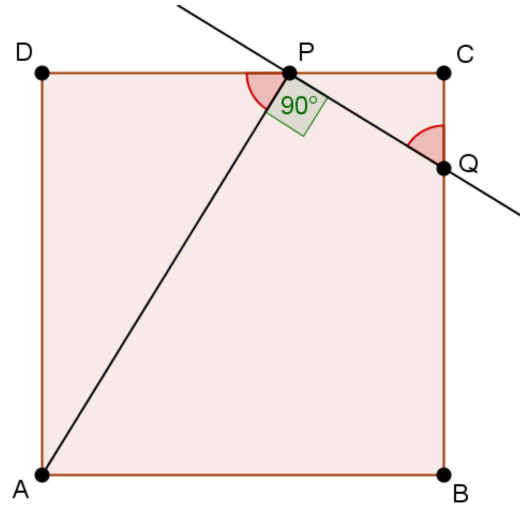
Pertanto: $\overline{DM} = 29\ cm$ e $\overline{AM} = 50 - x = 21\ cm$

Il perimetro del triangolo AMD è: $2p = \overline{AM} + \overline{DM} + \overline{AD} = (21 + 29 + 20)cm = 70cm$.

L'area del triangolo AMD è: $S = \frac{\overline{AM}+\overline{AD}}{2} = \frac{(21+20)cm}{2} = 210\ cm^2$.

Problema 2

É dato un quadrato $ABCD$, il cui lato misura a. Preso un punto P sul lato CD, traccia la perpendicolare ad AP, che incontra BC in Q. Sapendo che vale $\overline{DP}+\overline{CQ}=\frac{8}{9}a$, determina la distanza di P da D.



Soluzione

Ponendo: $\overline{DP}=x \quad (0<x<a)$ si ottiene:

$\overline{CP}=a-x$ e $\overline{CQ}=\frac{8}{9}a-x$

I due triangoli ADP e CPQ sono simili per il I° criterio di similitudine.

Infatti:

$\widehat{D}=\widehat{C}=90°$

$D\widehat{P}A=90°-C\widehat{P}Q=C\widehat{Q}P$

Pertanto hanno i lati corrispondenti proporzionali:

$\overline{DP}:\overline{CQ}=\overline{AD}:\overline{CP}$

$x:\left(\frac{8}{9}a-x\right)=a:(a-x)$ da cui:

$\left(\frac{8}{9}a-x\right)\cdot a=x\cdot(a-x)\,;$ $\quad \frac{8}{9}a^2-ax=ax-x^2\,;$

$8a^2-9ax=9ax-9x^2\,;$ $\quad 9x^2-18ax+8a^2=0\,;$

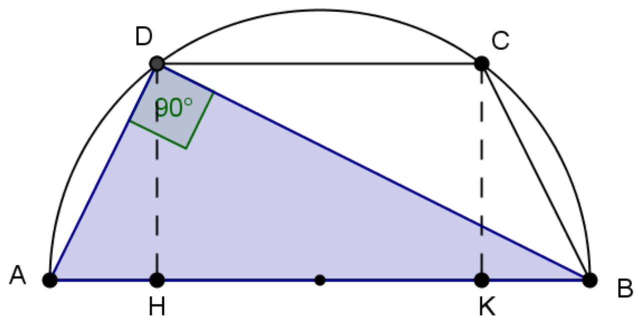
$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=\frac{9a\pm\sqrt{81a^2-72a^2}}{9}=\frac{9a\pm\sqrt{9a^2}}{9}=\frac{9a\pm3a}{9}=\begin{array}{l} x_1=\frac{9a-3a}{9}=\frac{6a}{9}=\frac{2}{3}a \\ x_2=\frac{9a+3a}{9}=\frac{12a}{9}=\frac{4}{3}a \end{array}$$

Soltanto la soluzione: $x_1=\frac{2}{3}a$ è accettabile.

La soluzione: $x_2=\frac{4}{3}a$ non è accettabile perché supera la lunghezza del lato del quadrato.

Problema 3

Un trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 25a$. Sapendo che $\overline{CD} = 7a$, determina la misura del perimetro e l'area del trapezio.



Soluzione

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AB} - \overline{HK}}{2} = \frac{25a - 7a}{2} = \frac{18a}{2} = 9a$$

Applicando il I° T. di Euclide al triangolo rettangolo ABD si ha:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AH}} = \sqrt{25a \cdot 9a} = \sqrt{225a^2} = 15a$$

Applicando il II° T. di Euclide al triangolo rettangolo ABD si ha:

$$\overline{DH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

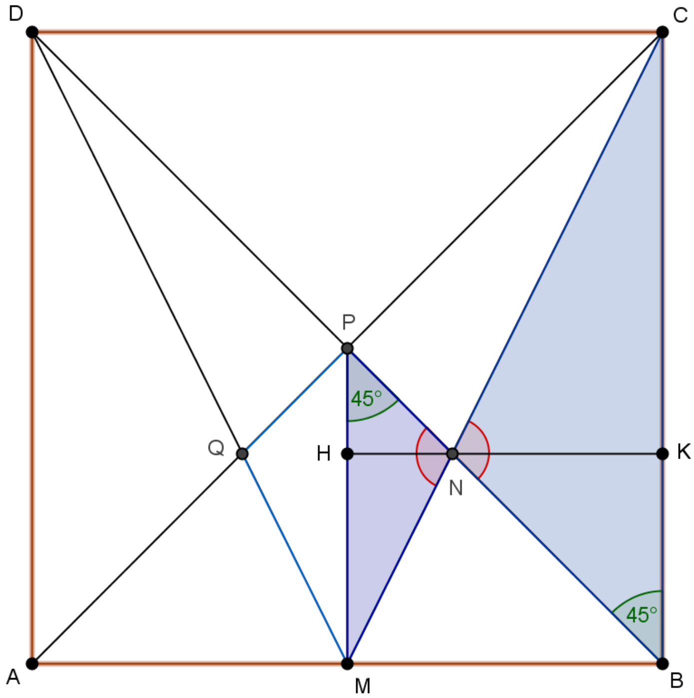
$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{BH}} = \sqrt{9a \cdot 16a} = \sqrt{144a^2} = 12a .$$

Il perimetro del trapezio è: $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 25a + 15a + 7a + 15a = 62a$.

L'area del trapezio *è:* $S = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} \cdot \overline{DH} = \frac{25a+7a}{2} \cdot 12a = 192a^2$ *.*

Problema 4

Il lato del quadrato $ABCD$ misura $12\ cm$. M è il punto medio del lato AB.
Determina l'area del deltoide $MNPQ$.



Soluzione

Dall'esame della figura si deduce che:

$\overline{PM} = \frac{\overline{BC}}{2} = 6\ cm$;

$C\hat{B}N = 45°$ perché il triangolo BCD è isoscele;

$M\hat{P}N = C\hat{B}N = 45°$ perché alterni interni;

$M\hat{N}P = B\hat{N}C$ perché opposti al vertice;
Si conclude quindi che, per il I° criterio di similitudine,
i triangoli: MNP e BCN sono simili.

Pertanto due lati corrispondenti sono proporzionali alle altezze che escono da due vertici corrispondenti:

Ponendo l'altezza del triangolo $\overline{HN} = x \Rightarrow \overline{KN} = 6 - x$

Dalla proporzione: $\overline{BC} : \overline{MP} = \overline{KN} : \overline{HN}$

si ottiene: $12 : 6 = (6 - x) : x$

$6 \cdot (6 - x) = 12x$;

$36 - 6x = 12x$; $18x = 36$; $x = 2$;

Cioè: $\overline{HN} = 2\ cm$.

L'area del deltoide $MNPQ$ è: $S_{MNPQ} = 2 \cdot S_{MNP} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{MP} \cdot \overline{HN} = 6 \cdot 2 = 12\ cm^2$.

Esercizio 1 - Petta

La base maggiore di un trapezio isoscele misura 12 cm e il lato obliquo 5 cm. Sapendo che la base minore è metà di quella maggiore,calcolate l'area e il perimetro. Prolungati i lati obliqui,determinate l'area e il perimetro del triangolo così ottenuto,avente per base la base maggiore del trapezio.

Esercizio 2 - Petta

Le lunghezze dei lati di un triangolo sono 8,15,17 cm. Verificate che il triangolo é rettangolo. Calcolate la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta nel triangolo e la misura del perimetro di un triangolo simile la cui ipotenusa é 85 cm.