

Prova di Matematica: **Problemi e sistemi di I grado**

<b>1. Determina il grado dei seguenti sistemi</b>	
$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y^2 = 1 \\ y^2 \cdot (x^2 - y) = 0 \end{cases}$
Sistema di ___ grado	Sistema di ___ grado

<b>2. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema</b>			
$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3y + x = 1 \end{cases}$	$(x = 4; y = -1)$	$\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 3y - 4x = 4 \end{cases}$	$(x = 4; y = \frac{1}{2})$
SI	NO	SI	NO

**3. Indica, senza risolverli, il tipo dei seguenti sistemi lineari (determinato, indeterminato, impossibile):**

$\begin{cases} 2x - 6 = 5y \\ \frac{2}{5}x - y = -4 \end{cases}$	Sistema _____	$\begin{cases} 8y - 6x = \frac{2}{3} \\ 3x - 4y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$	Sistema _____	$\begin{cases} 2y - \frac{1}{2}x = \frac{3}{4} \\ x + y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$	Sistema _____
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$		$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$		$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	

**4. Risolvi i seguenti sistemi:**

$\begin{cases} \frac{4x + 3y}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5y - 2x}{3} \\ \frac{4 - 2x}{3} + 3y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2 + x}{x + 1} - \frac{x + 1}{y} = 1 - \frac{x^2}{y + xy} \\ x - 1 - y = 0 \end{cases}$
con il metodo di Cramer e con il metodo di Riduzione	con il metodo di Sostituzione e con il metodo del Confronto

5. In un trapezio rettangolo, la differenza tra le basi vale  $12k$ . La base maggiore è uguale agli  $\frac{8}{5}$  della base minore e l'altezza è  $5k$ . Calcola il perimetro del trapezio.

6. Un teatro ha posti a sedere classificati in tre fasce: fascia A (200 posti), fascia B (300 posti) e fascia C (500 posti). I biglietti per uno spettacolo sono venduti a 50€ in fascia A, 40€ in fascia B e 25€ in fascia C. Alla chiusura della biglietteria il cassiere del teatro registra un incasso di 28250€. Sapendo che il teatro è stato riempito all'80% e che i posti venduti in fascia B sono stati il doppio di quelli di fascia A, determina quanti posti di fascia A, B e C sono stati venduti?

# Soluzione

<b>1. Determina il grado dei seguenti sistemi</b>	
$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y^2 = 1 \\ y^2 \cdot (x^2 - y) = 0 \end{cases}$
Sistema di <b>2° grado</b>	Sistema di <b>8° grado</b>

<b>2. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema</b>	
$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3y + x = 1 \end{cases} \quad (x = 4; y = -1)$	$\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 3y - 4x = 4 \end{cases} \quad (x = 4; y = \frac{1}{2})$
<b>SI</b>	<b>NO</b>

**3. Indica, senza risolverli, il tipo dei seguenti sistemi lineari (determinato, indeterminato, impossibile):**

$\begin{cases} 2x - 6 = 5y \\ \frac{2}{5}x - y = -4 \end{cases}$	Sistema <b>impossibile</b>	$\begin{cases} 8y - 6x = \frac{2}{3} \\ 3x - 4y + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$	Sistema <b>indeterminato</b>	$\begin{cases} 2y - \frac{1}{2}x = \frac{3}{4} \\ x + y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$	Sistema <b>determinato</b>
$\frac{a}{a'} = 5 \quad \frac{b}{b'} = 5 \quad \frac{c}{c'} = -\frac{3}{2}$		$\frac{a}{a'} = -2 \quad \frac{b}{b'} = -2 \quad \frac{c}{c'} = -2$		$\frac{a}{a'} = -\frac{1}{2} \quad \frac{b}{b'} = 2$	

**4. Risolvi i seguenti sistemi con i 4 metodi studiati:**

$$\begin{cases} \frac{4x + 3y}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5y - 2x}{3} & \text{moltiplicando per 6} \\ \frac{4 - 2x}{3} + 3y = 4 & \text{moltiplicando per 3} \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y + 3 = 10y - 4x \\ 4 - 2x + 9y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x - 7y = -3 \\ -2x + 9y = 8 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{8}{-2} = -4\right) \neq \left(\frac{b}{b'} = -\frac{7}{9}\right) \quad \text{Sistema determinato}$$

$$\begin{cases} 8x - 7y = -3 \\ -2x + 9y = 8 \end{cases}$$

Metodo di riduzione

$$\begin{array}{r} 2 \cdot \begin{cases} 8x - 7y = -3 \\ -2x + 9y = 8 \end{cases} \\ 8 \cdot \begin{cases} 8x - 7y = -3 \\ -2x + 9y = 8 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{r} \begin{cases} +16x - 14y = -6 \\ -16x + 72y = 64 \end{cases} \\ \hline \begin{cases} 58y = 58; \\ y = 1. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \cdot \begin{cases} 8x - 7y = -3 \\ -2x + 9y = 8 \end{cases} \\ 7 \cdot \begin{cases} 8x - 7y = -3 \\ -2x + 9y = 8 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{r} \begin{cases} +72x - 63y = -27 \\ -14x + 63y = 56 \end{cases} \\ \hline \begin{cases} 58x = 29; \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}$$

La soluzione è  $(x = \frac{1}{2}; y = 1)$ .

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} 8x - 7y = -3 \\ -2x + 9y = 8 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 9 - (-2) \cdot (-7) = 72 - 14 = 58.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \cdot 9 - 8 \cdot (-7) = -27 + 56 = 29.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot 8 - (-2) \cdot (-3) = 64 - 6 = 58.$$

$$\left(x = \frac{D_x}{D} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{D_y}{D} = \frac{58}{58} = 1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{2+x}{x+1} - \frac{x+1}{y} = 1 - \frac{x^2}{y+xy} \\ x-1-y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2+x}{x+1} - \frac{x+1}{y} = 1 - \frac{x^2}{y \cdot (1+x)} \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$C.E.: y \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq -1$$

$$m.c.m. = y(1+x)$$

$$\begin{cases} \frac{2+x}{x+1} \cdot y(1+x) - \frac{x+1}{y} \cdot y(1+x) = 1 \cdot y(1+x) - \frac{x^2}{y(1+x)} \cdot y(1+x) \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2+x) \cdot y - (x+1) \cdot (1+x) = y(1+x) - x^2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + xy - (x^2 + 1 + 2x) = y + xy - x^2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + xy - x^2 - 1 - 2x = y + xy - x^2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{-2}{+1} = -2\right) \neq \left(\frac{b}{b'} = \frac{+1}{-1} = -1\right) \quad \text{Sistema determinato}$$

### Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + x - 1 = 1 \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = 2 \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 - 1 \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

soluzione accettabile.

### Metodo del confronto

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 + 2x \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2x = x - 1 \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 - 1 \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

5. In un trapezio rettangolo, la differenza tra le basi vale  $12k$ .

La base maggiore è uguale agli  $\frac{8}{5}$  della base minore e l'altezza è  $5k$ . Calcola il perimetro del trapezio.

### Soluzione

Poniamo la misura della lunghezza della base maggiore  $\overline{AB} = x$  e la misura della lunghezza della base minore  $\overline{DC} = y$ , con  $y > 0$  e  $x > 0$ .

Si ottiene:

$$\begin{cases} x - y = 12k \\ x = \frac{8}{5}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{5}y - y = 12k \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8y - 5y = 60k \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 60k \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 20k \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \cdot 20k \\ \quad \quad \quad - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 32k \\ y = 20k \end{cases}$$

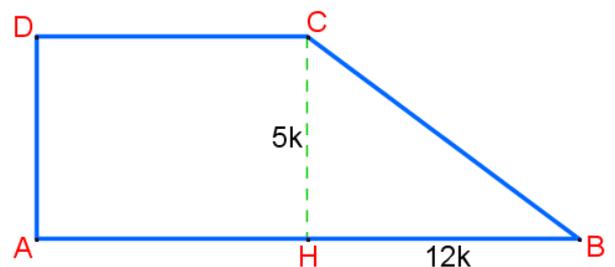
Pertanto:  $\overline{AB} = 32k$ ,  $\overline{DC} = 20k$  e  $\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = 32k - 20k = 12k$ .

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{(5k)^2 + (12k)^2} = \sqrt{25k^2 + 144k^2} = \sqrt{169k^2} = 13k.$$

In definitiva il perimetro del trapezio vale:

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD} = 32k + 13k + 20k + 5k = 70k.$$



6. Un teatro ha posti a sedere classificati in tre fasce: fascia A (200 posti), fascia B (300 posti) e fascia C (500 posti). I biglietti per uno spettacolo sono venduti a 50€ in fascia A, 40€ in fascia B e 25€ in fascia C. Alla chiusura della biglietteria il cassiere del teatro registra un incasso di 28250€. Sapendo che il teatro è stato riempito all'80% e che i posti venduti in fascia B sono stati il doppio di quelli di fascia A, determina quanti posti di fascia A, B e C sono stati venduti?

Soluzione

Poniamo il numero dei posti di fascia A =  $x$ , il numero dei posti di fascia B =  $y$ , il numero dei posti di fascia C =  $z$ , con  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 80\% \cdot 1000 \\ y = 2x \\ 50x + 40y + 25z = 28\,250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 800 \\ y = 2x \\ 10x + 8y + 5z = 5650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2x + z = 800 \\ \text{---} \\ 10x + 8 \cdot 2x + 5z = 5650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + z = 800 \\ \text{---} \\ 26x + 5z = 5650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 800 - 3x \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 26x + 5(800 - 3x) = 5650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 26x + 4000 - 15x = 5650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 11x = 1650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ x = 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 800 - 3 \cdot 150 = 350 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ y = 2 \cdot 150 = 300 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150 \\ y = 300 \\ z = 350 \end{cases}$$

Pertanto il numero dei posti venduti di fascia A sono 150,  
il numero dei posti venduti di fascia B sono 300,  
il numero dei posti venduti di fascia C sono 350.