Prova di Matematica: Teoremi di Pitagora ed Euclide

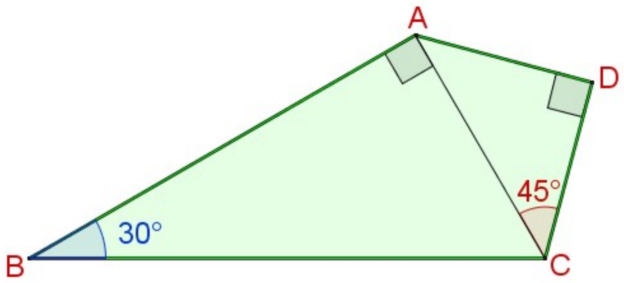
Alunno: ____ *Classe:* **2 A** *L. Scientifico* *17 maggio 2023*

1. Risolvi le seguenti disequazioni:

$3x^2 - 5x + 2 \leq 0$ $\quad$ $25x^2 - 20x + 4 > 0$ $\quad$ $4x^4 - 3x^3 < 0$

2. In un triangolo rettangolo le proiezioni dei due cateti sulla ipotenusa misurano 9 cm e 16 cm. Determina le misure dei lati del triangolo.

3. Calcola l'area del terreno in figura sapendo che $\overline{AC} = 20\ m$.



4. Un trapezio isoscele ABCD ha la base maggiore doppia della base minore e gli angoli adiacenti alla base minore di 120°. Sapendo che l'area del trapezio è $48\sqrt{3}\ cm^2$, calcola il perimetro del trapezio.

Soluzione

1. Risolvi le seguenti disequazioni:

$3x^2 - 5x + 2 \leq 0$

Risolviamo prima l'equazione associata: $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1$;

$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \mp \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \begin{array}{l} x_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{3} = 1 \end{array}$ *La soluzione è* $\mathbf{\frac{2}{3} \leq x \leq 1}$.

$25x^2 - 20x + 4 > 0$

Risolviamo prima l'equazione associata: $25x^2 - 20x + 4 = 0$.

$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (-10)^2 - 25 \cdot 4 = 100 - 100 = 0$;

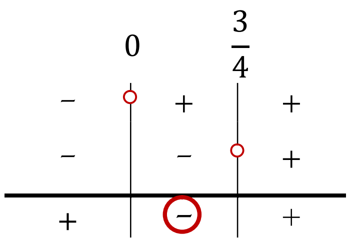
$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{10 \mp \sqrt{0}}{25} = x_{1,2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. *La soluzione è* $\mathbf{\forall x \neq \frac{2}{5}}$.

$4x^4 - 3x^3 < 0$

$x^3 \cdot (4x - 3) < 0$

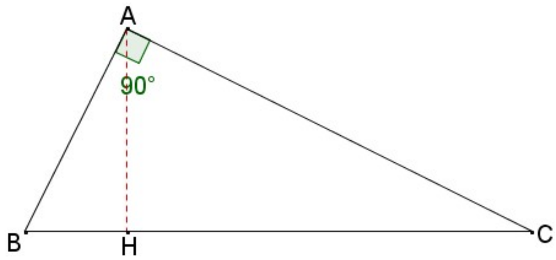
$x^3 > 0$ | $x > 0$

$4x - 3 > 0$ | $x > \frac{3}{4}$



La soluzione è $\mathbf{0 < x < \frac{3}{4}}$.

2. In un triangolo rettangolo le proiezioni dei due cateti sulla ipotenusa misurano 9 cm e 16 cm. Determina le misure dei lati del triangolo.



Soluzione

Calcoliamo la misura dell'ipotenusa $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = (9 + 16)\ cm = \mathbf{25\ cm}$.

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

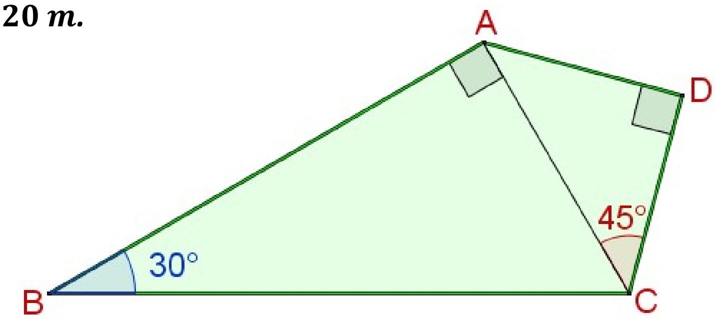
$\overline{AB}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$;

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{9 \cdot 25}\ cm = \sqrt{225}\ cm = \mathbf{15\ cm}$.

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^{\,2} - \overline{AB}^{\,2}} = \sqrt{25^2 - 15^2}\ cm = \sqrt{625 - 225}\ cm = \sqrt{400}\ cm = \mathbf{20\ cm}$.

3. Calcola l'area del terreno in figura sapendo che $\overline{AC} = 20\ m$.



Soluzione

Essendo ABC un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60° si ha che l'ipotenusa è il doppio del cateto minore: $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 20\ m = 40\ m$.

Mentre il cateto maggiore $c_{60} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

$\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} 40\ m = 20\sqrt{3}\ m$.

L'area del triangolo ABC è

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 20\sqrt{3} \cdot 20\ m^2 = 200\sqrt{3}\ m^2$.

Essendo ACD un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 45° si ha che il cateto

$c_{45} = \frac{i}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}}\ m$.

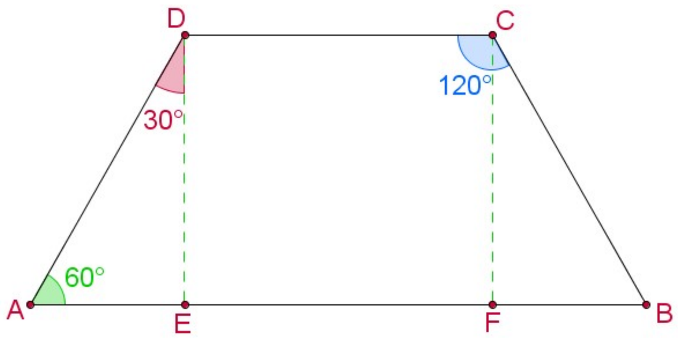
L'area del triangolo ACD è

$S_{ACD} = \frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot \frac{20}{\sqrt{2}}\ m^2 = 100\ m^2$.

In definitiva l'area del terreno in figura è:

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \mathbf{(200\sqrt{3} + 100)\ m^2}$.

3. Un trapezio isoscele ABCD ha la base maggiore doppia della base minore e gli angoli adiacenti alla base minore di 120°. Sapendo che l'area del trapezio è $48\sqrt{3}\ cm^2$, calcola il perimetro del trapezio.



Soluzione

Poniamo la misura della base minore $\overline{CD} = x, \quad x > 0$

Si ricava:

$\overline{AB} = 2x \qquad \overline{AE} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{2x - x}{2} = \frac{x}{2}$.

Essendo ADE un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60° si ha che l'ipotenusa è il doppio del cateto minore: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AE} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$.

Mentre il cateto maggiore $\overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} x$.

Dalla relazione $S_{ABCD} = 48\sqrt{3}\ cm^2$ *si ha:* $\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} \cdot \overline{DE} = 48\sqrt{3}\ cm^2$.

Si ottiene quindi l'equazione:

$\frac{2x + x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x = 48\sqrt{3}$; $\qquad \frac{3x}{4} \cdot \sqrt{3}x = 48\sqrt{3}$; $\qquad \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} = 48\sqrt{3}$;

$\frac{3\sqrt{3}x^2}{4} \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} = 48\sqrt{3} \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}}$; $\qquad x^2 = 64$; $\qquad x = \begin{matrix} x_1 = -8 & \text{non accettabile} \\ x_2 = +8 & \text{accettabile} \end{matrix}$

Pertanto:

$\overline{CD} = x = 8\ cm$; $\qquad \overline{AD} = \overline{BC} = x = 8\ cm$; $\qquad \overline{AB} = 2x = 16\ cm$.

Il perimetro misura $p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = (16 + 8 + 8 + 8)\ cm = \mathbf{40\ cm}$.