Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2022-2023

Classe *2A Liceo Scientifico*

19 dicembre 2022

Prova di Matematica: Piano cartesiano e retta

1. Dato il fascio di rette di equazione $kx + (k-2)y + k - 3 = 0$, determina:

a. la retta $\boldsymbol{a}$ del fascio parallela all'asse x ;
b. la retta $\boldsymbol{b}$ del fascio passante per il punto $P(-3\,;\,1)$;
c. la retta $\boldsymbol{c}$ del fascio passante per l'origine degli assi cartesiani;
d. la retta $\boldsymbol{d}$ del fascio perpendicolare alla retta $y = 2x - 5$;

2. Dati nel piano cartesiano i punti: $\mathbf{A}(-2\,;\,1)$, $\mathbf{B}(6\,;\,-5)$ e $\mathbf{C}(1\,;\,5)$, determina:

a. la rappresentazione grafica del triangolo ABC;
b. il perimetro del triangolo ABC;
c. l'area del triangolo ABC;
d. i vertici del triangolo $\mathrm{A'B'C'}$ ottenuto dalla traslazione di vettore $\vec{v}\,(6\,,1)$ del triangolo ABC .

3. Per il noleggio settimanale di un'automobile è possibile scegliere fra tre diverse agenzie:

- l'agenzia "Azzurra" chiede una quota fissa di 12€ e una tariffa di 0,75€ al kilometro percorso;
- l'agenzia "Rossa" chiede una quota fissa di 18€ e una tariffa di 0,50€ al kilometro percorso;
- l'agenzia "Verde" chiede una quota fissa di 39€ e kilometri illimitati;

Stabilisci qual è la tariffa più conveniente, in relazione al numero di kilometri percorsi.

Soluzione

1. Dato il fascio di rette di equazione $kx + (k-2)y + k - 3 = 0$, determina:

e. la retta $\boldsymbol{a}$ del fascio parallela al'asse x ;
f. la retta $\boldsymbol{b}$ del fascio passante per il punto $P(-3\,;\,1)$;
g. la retta $\boldsymbol{c}$ del fascio passante per l'origine degli assi cartesiani;
h. la retta $\boldsymbol{d}$ del fascio perpendicolare alla retta $y = 2x - 5$;

Soluzione

a. *La retta $\boldsymbol{a}$ del fascio parallela all'asse si ottiene quando il coefficiente della variabile x è nullo, cioè per $k = 0$. Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene:*

$0x + (0-2)y + 0 - 3 = 0\,; \qquad -2y - 3 = 0\,; \qquad 2y + 3 = 0\,; \qquad y = -\dfrac{3}{2}$.

b. *La retta $\boldsymbol{b}$ del fascio passante per il punto $P(-3\,;1)$ si ottiene imponendo il passaggio per il punto P:*

$k\cdot(-3) + (k-2)\cdot 1 + k - 3 = 0\,; \qquad -3k + k - 2 + k - 3 = 0\,; \qquad -k - 5 = 0\,; \qquad k = -5$.

Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene:

$-5x + (-5-2)y - 5 - 3 = 0\,; \qquad -5x - 7y - 8 = 0$.

c. *La retta $\boldsymbol{c}$ del fascio passante per il punto $O(0\,;0)$ si ottiene imponendo il passaggio per l'origine:*

$k\cdot 0 + (k-2)\cdot 0 + k - 3 = 0\,; \qquad k - 3 = 0\,; \qquad k = 3$.

Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene:

$3x + (3-2)y + 3 - 3 = 0\,; \qquad 3x + y = 0; \qquad y = -3x$.

d. *La retta $\boldsymbol{d}$ del fascio perpendicolare alla retta $y = 2x - 5$ si ottiene ponendo $m_f = -\frac{1}{m_d}$.*

$m_f = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{k}{k-2} \qquad\qquad m_d = 2$.

Si ricava:

$-\dfrac{k}{k-2} = -\dfrac{1}{2}\,; \qquad \dfrac{k}{k-2} = \dfrac{1}{2}\,; \qquad 2k = k - 2\,; \qquad k = -2$.

Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene:

$-2x + (-2-2)y - 2 - 3 = 0\,; \qquad -2x - 4y - 5 = 0\,; \qquad 2x + 4y + 5 = 0\,; \qquad y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4}$.

2. Dati nel piano cartesiano i punti: $\mathrm{A}(-2\,;1)$, $\mathrm{B}(6\,;-5)$ e $\mathrm{C}(1\,;5)$, determina:

- **a. la rappresentazione grafica del triangolo ABC;**
- **b. il perimetro del triangolo ABC;**
- **c. l'area del triangolo ABC;**
- **d. i vertici del triangolo A'B'C' ottenuto dalla traslazione di vettore $\vec{v}\,(6\,,1)$ del triangolo ABC .**

<u>Soluzione A</u>

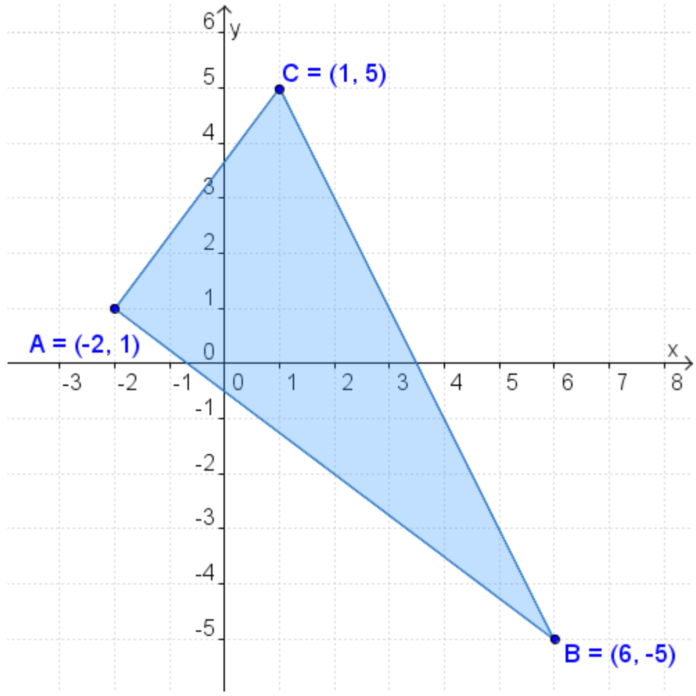
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2-6)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10\,.$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (-5-5)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{5} = 5\sqrt{5}\,.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\,.$$

Pertanto il perimetro del triangolo ABC è:

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 10 + 5\sqrt{5} + 5 = 15 + 5\sqrt{5}\,.$$



<u>Soluzione B.1</u>

L'area del triangolo ABC è data da:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -2 & 1 \\ 6 & -5 \\ 1 & 5 \end{matrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[(10+1+30) - (-5-10+6)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[41+9] = \frac{1}{2}\cdot 50 = 25\,.$$

<u>Soluzione B.2</u>

Le misure dei lati del triangolo formano una terna pitagorica:

$$\overline{AB}^{\,2} + \overline{AC}^{\,2} = \overline{BC}^{\,2}\,; \qquad 10^2 + 5^2 = \left(\sqrt{125}\right)^2; \qquad 100 + 25 = 125\,.$$

Pertanto l'area del triangolo è data dal semiprodotto dei due cateti:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5 = 25\,.$$

<u>Soluzione C</u>

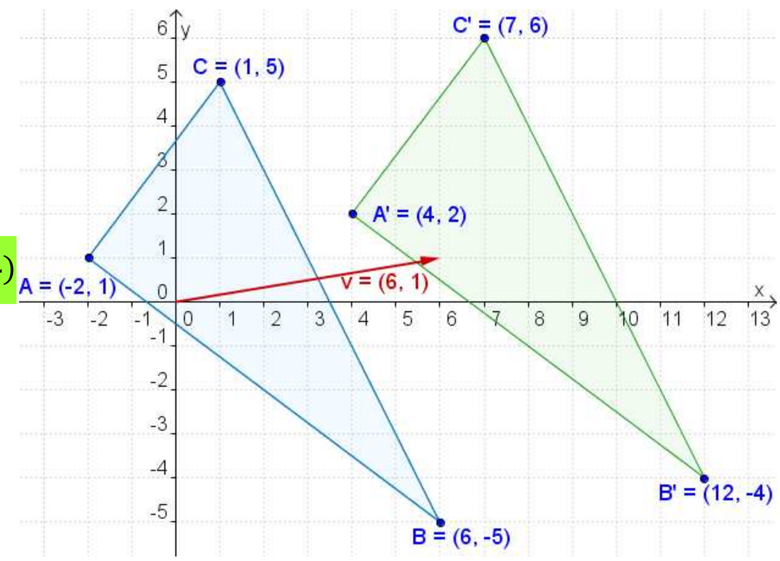
Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

I vertici del triangolo $A'B'C'$ sono:

$A(-2\,;1)$ $\begin{cases} x' = -2+6 = 4 \\ y' = 1+1 = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $A'(4\,;2)$

$B(6\,;-5)$ $\begin{cases} x' = 6+6 = +12 \\ y' = -5+1 = -4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $B'(12\,;-4)$

$C(1\,;5)$ $\begin{cases} x' = 1+6 = +7 \\ y' = 5+1 = +6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $C'(7\,;6)$



3. Per il noleggio settimanale di un'automobile è possibile scegliere fra tre diverse agenzie:

- **l'agenzia "Azzurra" chiede una quota fissa di 12€ e una tariffa di 0,75€ al kilometro percorso;**
- **l'agenzia "Rossa" chiede una quota fissa di 18€ e una tariffa di 0,50€ al kilometro percorso;**
- **l'agenzia "Verde" chiede una quota fissa di 39€ e kilometri illimitati;**

Stabilisci qual è la tariffa più conveniente, in relazione al numero di kilometri percorsi.

Soluzione

Indichiamo con x il numero di kilometri percorsi e con y la corrispondente spesa. Con $x \in N$.

La tariffa dell'agenzia "Azzurra" è espressa dalla funzione lineare: $y = 0{,}75\,x + 12$; $y = \frac{3}{4}\,x + 12$;

La tariffa dell'agenzia "Rossa" è espressa dalla funzione lineare: $y = 0{,}50\,x + 18$; $y = \frac{1}{2}\,x + 18$;

La tariffa dell'agenzia "Verde" è espressa dalla funzione lineare: $y = 39$.

Tracciamo i grafici delle tre funzioni lineari:

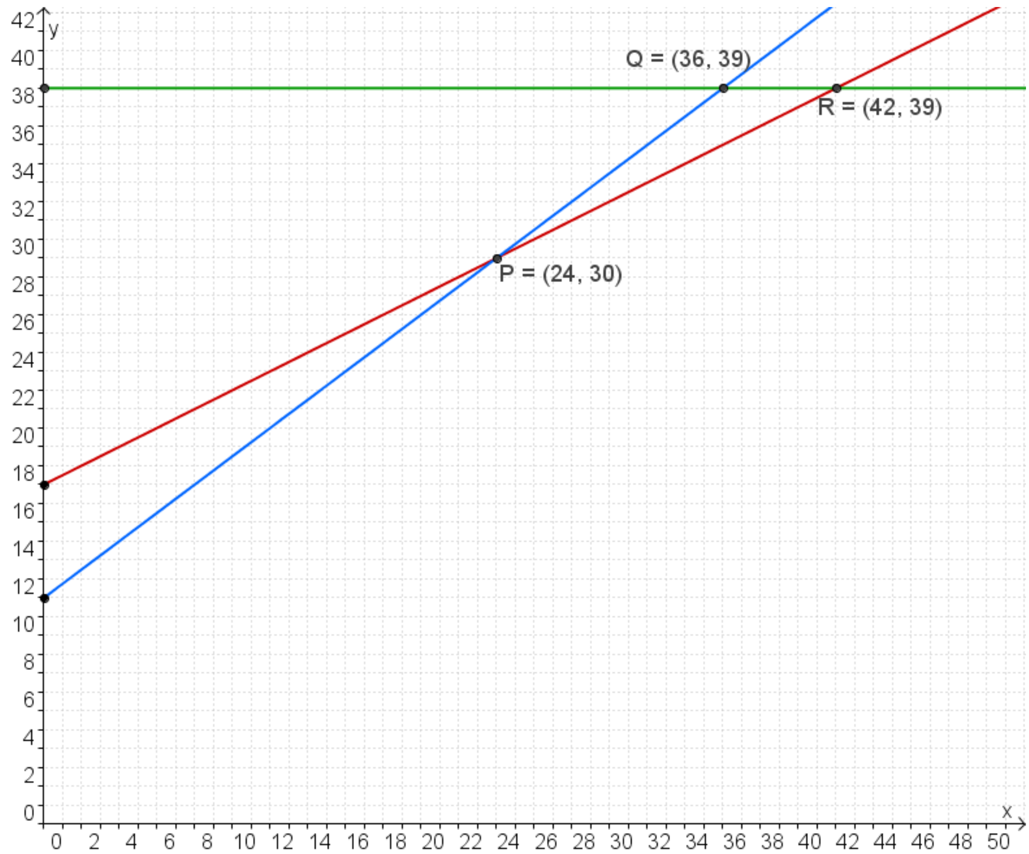
Determiniamo i punti di intersezione fra le tre funzioni lineari:

$$\begin{matrix} A \\ R \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{3}{4}\,x + 12 \\ y = \frac{1}{2}\,x + 18 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{4}x + 12 = \frac{1}{2}x + 18 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 48 = 2x + 72 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 \\ y = 30 \end{cases} \Rightarrow \quad P\,(24\,;30)$$

$$\begin{matrix} A \\ V \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{3}{4}\,x + 12 \\ y = 39 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{4}x + 12 = 39 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 48 = 156 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 108 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 36 \\ y = 39 \end{cases} \Rightarrow \quad Q\,(36\,;39)$$

$$\begin{matrix} R \\ V \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{1}{2}\,x + 18 \\ y = 39 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x + 18 = 39 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x + 36 = 78 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 42 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 42 \\ y = 39 \end{cases} \Rightarrow \quad R\,(42\,;39)$$

Tracciamo poi i grafici delle tre funzioni lineari:



Dall'analisi dei grafici si ottiene:

Per $0 < x < 24$ *è più conveniente l'agenzia "Azzurra";*

Per $24 < x < 42$ *è più conveniente è più conveniente l'agenzia "Rossa";*

Per $x > 42$ *è più conveniente è più conveniente l'agenzia "Verde";*

Per $x = 24$ *è indifferente scegliere l'agenzia "Azzurra" o l'agenzia "Rossa";*

Per $x = 42$ *è indifferente scegliere l'agenzia "Rossa" o l'agenzia "Verde".*