

**Prova di Matematica: Equazioni di II grado e parabola**

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$$2x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x^2-x-2} + \frac{3}{2} = 0$$

2. Data l'equazione  $(m+1)x^2 + 2(m+2)x + m+3 = 0$ . Determina per quali valori del parametro  $m$ :

- ammette soluzioni reali;
- ammette soluzioni opposte;
- ammette una soluzione uguale a 0;
- ammette soluzioni reali tali che la somma dei reciproci delle soluzioni è uguale a 4;

3. Una crociera lungo un fiume lungo  $60\text{km}$  dura  $16\text{ ore}$ . Il battello risale la corrente e poi torna indietro mantenendo sempre la stessa potenza del motore. Sapendo che la velocità della corrente è di  $2\text{ km/h}$ , determina la velocità del battello in acqua ferma e la durata della parte di viaggio in risalita della corrente?

4. Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle  $y$ , passante per i punti  $A(0; -3)$ ,  $B(3; 0)$ ,  $C(-1; 0)$  e traccia il relativo grafico dopo aver determinato le coordinate del vertice.

# Soluzione

## 1. Risolvi le seguenti equazioni:

$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9;$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \mp \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \mp 3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$
$$x_2 = \frac{7 + 3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x^2 - x - 2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{4}{x-2} + \frac{x}{(x+1)(x-2)} + \frac{3}{2} = 0$$

$$C.E.: x \neq 2 \wedge x \neq -1$$

$$m.c.m. = 2(x-2)(x+1)$$

$$\frac{4}{x-2} \cdot 2(x-2)(x+1) + \frac{x}{(x+1)(x-2)} \cdot 2(x-2)(x+1) + \frac{3}{2} \cdot 2(x-2)(x+1) = 0;$$

$$4 \cdot 2(x+1) + x \cdot 2 + 3 \cdot (x-2)(x+1) = 0;$$

$$8x + 8 + 2x + 3 \cdot (x^2 - x - 2) = 0;$$

$$8x + 8 + 2x + 3x^2 - 3x - 6 = 0;$$

$$3x^2 + 7x + 2 = 0; \quad \Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \mp \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \mp 5}{6} = \frac{-12}{6} = -2 \quad \text{Accettabile}$$
$$x_2 = \frac{-7 + 5}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{Accettabile}$$

## 2. Data l'equazione $(m+1)x^2 + 2(m+2)x + m+3 = 0$ . Determina per quali valori del parametro $m$ :

- ammette soluzioni reali;
- ammette soluzioni opposte;
- ammette una soluzione uguale a 0;
- ammette soluzioni reali tali che la somma dei reciproci delle soluzioni è uguale a 4;

$$A = m + 1 \quad B = 2(m + 2) \quad C = m + 3$$

### Soluzione a

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0: (m+2)^2 - (m+1)(m+3) \geq 0; \quad m^2 + 4 + 4m - (m^2 + 3m + m + 3) \geq 0;$$

$$m^2 + 4 + 4m - m^2 - 3m - m - 3 \geq 0; \quad 1 \geq 0; \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

### Soluzione b

$$B = 0: +2(m+2); \quad m = -2 \Rightarrow -x^2 - 2 + 3 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \mp 1.$$

### Soluzione c

$$C = 0: m + 3 = 0; \quad m = -3 \Rightarrow -2x^2 - 2x = 0; \quad x^2 + x = 0; \quad x(x+1) = 0; \quad x = 0 \wedge x = -1.$$

### Soluzione d

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4; \quad \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = 4; \quad \frac{-\frac{B}{A}}{\frac{C}{A}} = 4; \quad -\frac{B}{C} = 4; \quad -\frac{2(m+2)}{m+3} = 4; \quad C.E.: k \neq -3;$$

$$\frac{2(m+2)}{m+3} = -4; \quad 2(m+2) = -4(m+3); \quad 2m+4 = -4m-12; \quad 6m = -16; \quad m = -\frac{8}{3}.$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{8}{3} + 1\right)x^2 + 2\left(-\frac{8}{3} + 2\right)x - \frac{8}{3} + 3 = 0; \quad -\frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{3} \cdot 2x + \frac{1}{3} = 0;$$

$$5x^2 + 4x - 1 = 0; \quad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 2^2 - 5 \cdot (-1) = 4 + 5 = 9;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-2 \mp \sqrt{9}}{5} = \begin{matrix} x_1 = \frac{-2-3}{5} = -\frac{5}{5} = -1 \\ x_2 = \frac{-2+3}{5} = \frac{1}{5} \end{matrix}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{1} + \frac{5}{1} = 4 .$$

3. Una crociera lungo un fiume lungo 60km dura 16 ore. Il battello risale la corrente e poi torna indietro mantenendo sempre la stessa potenza del motore. Sapendo che la velocità della corrente è di 2 km/h, determina la velocità del battello in acqua ferma e la durata della parte di viaggio in risalita della corrente?

Soluzione

Poniamo la velocità del battello in acqua priva di corrente =  $x$ , con  $x > 0$  e la velocità della corrente =  $v_c$ .

Si ha:

$$t_{Totale} = t_{Risalita} + t_{Ridiscesa}; \quad t_{Totale} = \frac{s}{v_{Risalita}} + \frac{s}{v_{Ridiscesa}}; \quad t_{Totale} = \frac{s}{x - v_c} + \frac{s}{x + v_c};$$

$$16 = \frac{60}{x-2} + \frac{60}{x+2}; \quad \text{C.E.: } x \neq 2 \quad \text{m.c.m.} = (x-2)(x+2)$$

$$16 \cdot (x-2)(x+2) = \frac{60}{x-2} \cdot (x-2)(x+2) + \frac{60}{x+2} \cdot (x-2)(x+2);$$

$$16 \cdot (x^2 - 4) = 60 \cdot (x+2) + 60 \cdot (x-2);$$

$$16x^2 - 64 = 60x + 120 + 60x - 120;$$

$$16x^2 - 120x - 64 = 0;$$

$$2x^2 - 15x - 8 = 0; \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8) = 225 + 64 = 289;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15 \mp \sqrt{289}}{2 \cdot 2} = \begin{matrix} x_1 = \frac{15-17}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} & \text{Non accettabile} \\ x_2 = \frac{15+17}{4} = \frac{32}{4} = 8 & \text{Accettabile} \end{matrix}$$

Pertanto la velocità del battello in acqua priva di corrente è  $v = 8\text{km/h}$ .

La durata del viaggio effettuata in risalita della corrente è:

$$t_{Risalita} = \frac{s}{x - v_c} = \frac{60 \text{ km}}{(8 - 2) \text{ km/h}} = 10 \text{ h} .$$

4. Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle  $y$ , passante per i punti  $A(0; -3)$ ,  $B(3; 0)$ ,  $C(-1; 0)$  e traccia il relativo grafico dopo aver determinato le coordinate del vertice.

Soluzione

L'equazione richiesta è del tipo:  $y = ax^2 + bx + c$

Imponiamo il passaggio per il punto  $A(0; -3) \Rightarrow -3 = a(0)^2 + b(0) + c; \quad -3 = c$

Imponiamo il passaggio per il punto  $B(3; 0) \Rightarrow y = a(3)^2 + b(3) + c; \quad 0 = 9a + 3b + c$

Imponiamo il passaggio per il punto  $C(-1; 0) \Rightarrow y = a(-1)^2 + b(-1) + c; \quad 0 = a - b + c$

Risolviamo il sistema formato dalle tre equazioni ottenute:

$$\begin{cases} -3 = c \\ 0 = 9a + 3b + c \\ 0 = a - b + c \end{cases} \quad \begin{cases} c = -3 \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 9a + 3b - 3 \\ 0 = a - b - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ b = a - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 9a + 3(a - 3) - 3 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 9a + 3a - 9 - 3 \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12a = -12 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 3 \\ a = +1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ b = -2 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della parabola è:  $y = x^2 - 2x - 3$ .

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad V(1; -4)$$

$$y_V = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

