Prova di Matematica : Equazioni e problemi di I grado

Alunno: ____ *Classe:* **1B** *L. Scientifico* *1 giugno 2023*

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$$(2x+1)(x-3)-2(x-1)^2=2x+1$$

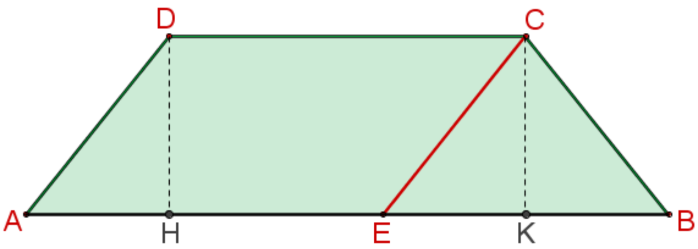
$$\frac{5}{x+3}=\frac{6}{x-2}+\frac{7x-10}{x^2+x-6}$$

2. La distanza fra due località è stata percorsa da una moto in 9 ore, fra andata e ritorno. Nell'andata la velocità media è stata di 56 km/h e nel ritorno di 70 km/h. Determina il tempo di andata e la distanza fra le due località.

3. Paolo è nato 5 anni dopo Maria. Tra 3 anni l'età di Paolo sarà i $\frac{2}{3}$ di quella di Maria. Determina le età attuali di Paolo e Maria?

4. Un terreno a forma di trapezio isoscele viene diviso dalla parallela al lato obliquo condotta per uno degli estremi della base minore in un triangolo e in un parallelogrammo. L'area del trapezio è di $42\ cm^2$ e la sua altezza è $3\ cm$. Sapendo che l'area del triangolo è i $\frac{2}{5}$ dell'area del parallelogrammo, determina le aree dei due terreni così suddivisi.

Determina la posizione del punto E.



Soluzione

$(2x+1)(x-3)-2(x-1)^2=2x+1$;

$2x^2-6x+x-3-2\left(x^2+1-2x\right)=2x+1$;

$2x^2-6x+x-3-2x^2-2+4x=2x+1$;

$-6x+x-3-2+4x=2x+1$;

$-6x+x+4x-2x=2+3+1$;

$-3x=6$;

$3x=-6$; $\qquad x=-2$.

$\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{6}{x-2}+\dfrac{7x-10}{x^2+x-6}$; $\qquad C.E.: \; x\neq -3 \quad \wedge \quad x\neq 2$

$\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{6}{x-2}+\dfrac{7x-10}{(x+3)(x-2)}$; $\qquad m.c.m. = (x+3)(x-2)$

$\dfrac{5}{x+3}\cdot(x+3)(x-2)=\dfrac{6}{x-2}\cdot(x+3)(x-2)+\dfrac{7x-10}{(x+3)(x-2)}\cdot(x+3)(x-2)$;

$5\cdot(x-2)=6\cdot(x+3)+7x-10$;

$5x-10=6x+18+7x-10$;

$5x=6x+18+7x$;

$5x-6x-7x=18$;

$-8x=18$;

$8x=-18$;

$\dfrac{8x}{8}=-\dfrac{18}{8}$; $\qquad x=-\dfrac{9}{4} \qquad$ *Soluzione accettabile* .

2. Paolo è nato 5 anni dopo Maria. Tra 3 anni l'età di Paolo sarà i $\frac{2}{3}$ di quella di Maria. Determina le età attuali di Paolo e Maria?

Soluzione

Individuiamo i dati e l'obiettivo.

$$\begin{cases} Età\ Paolo = Età\ Maria - 5 \\ (Età\ Paolo)_{Fra\ 3\ anni} = \frac{2}{3} \cdot (Età\ Maria)_{Fra\ 3\ anni} \end{cases}$$

$Età\ Paolo = ?$

$Età\ Maria = ?$

Indichiamo l'età attuale di Maria $= x$

Il cui dominio è $D = \{x \in N \ / \ x > 5\}$

L'età attuale di Paolo $= x - 5$.

Tra 3 anni, l'età di Maria sarà $x + 3$ *e l'età di Paolo sarà* $(x - 5) + 3$.

Per rendere più chiara la situazione problematica disegniamo la seguente tabella:

Età attuale	
Età di Maria	x
Età di Paolo	$x - 5$

Età fra 3 anni	
Età di Maria	$x + 3$
Età di Paolo	$(x - 5) + 3$

Il testo del problema afferma che:

"Tra 3 anni l'età di Paolo sarà i $\frac{2}{3}$ *di quella di Maria".*

$(Età\ Paolo)_{Fra\ 3\ anni} = 2 \cdot (Età\ Maria)_{Fra\ 3\ anni}$

Si ottiene l'equazione:

$(x - 5) + 3 = \frac{2}{3} \cdot (x + 3)$;

$x - 5 + 3 = \frac{2}{3} x + 2$;

$3x - 15 + 9 = 2x + 6$;

$3x - 2x = 15 - 9 + 6$;

$x = 12$.

La soluzione soddisfa il dominio D dell'equazione.

Pertanto le età attuali di Maria e Paolo sono:

Età di Maria = 12 anni e l'età di Paolo = 7 anni.

Tra 3 anni, Età di Maria =15 anni e l'età di Paolo = 10 anni.

VERIFICA

$10 = \frac{2}{3} \cdot 15$; $\qquad 10 = 10$.

2. La distanza fra due località è stata percorsa da una moto in 9 ore, fra andata e ritorno. Nell'andata la velocità media è stata di 56 km/h e nel ritorno di 70 km/h. Determina il tempo di andata e la distanza fra le due località.

<u>*Soluzione*</u>

$$\begin{cases} v_A = 56\ km/h \\ v_R = 70\ km/h \\ t_A + t_R = 9^h \end{cases} \qquad s = ?$$

Poniamo il tempo di andata: $t_A = x$ *con* $D = \{x \in Q\ /\ 0 < x < 9\}$.

Il tempo di ritorno è: $t_R = 9 - x$ *ore.*

Il percorso di andata è uguale al percorso del ritorno. Cioè: $s_A = s_R$

Dalla relazione: $velocità = \dfrac{spazio}{tempo}$ *si ricava la relazione:* $spazio = velocità \cdot tempo$.

Sostituendo nella relazione $s_A = s_R$ *si ottiene:*

$v_A \cdot t_A = v_B \cdot t_B$;

$56 \cdot x = 70 \cdot (9 - x)$;

$56x = 630 - 70x$;

$56x + 70x = 630$;

$126x = 630$;

$\dfrac{126x}{126} = \dfrac{630}{126}$;

$x = 5$.

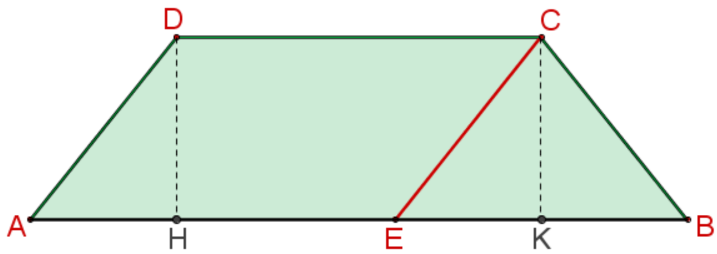
Pertanto il tempo di andata è 5 ore.

In 5 ore l'autotreno, viaggiando alla velocità di 56 Km/h ha percorso una distanza:

$s_A = v_A \cdot t_A = (56\ km/h) \cdot (5\ h) = 280\ km$.

4. Un terreno a forma di trapezio isoscele viene diviso dalla parallela al lato obliquo condotta per uno degli estremi della base minore in un triangolo e in un parallelogrammo. L'area del trapezio è di 42 cm^2 e la sua altezza è 3 cm. Sapendo che l'area del triangolo è i $\frac{2}{5}$ dell'area del parallelogrammo, determina le aree dei due terreni così suddivisi.

Determina la posizione del punto E.



<u>*Soluzione 1*</u>

L'area del trapezio è: $S_{ABCD} = 42\ cm^2$;

Quindi: $S_{ADCE} + S_{BCE} = 42\ cm^2$;

Cioè: $S_{ADCE} + \frac{2}{5} S_{ADCE} = 42\ cm^2$;

Poniamo $S_{ADCE} = x$ *con* $x > 0$. *Si ricava:*

$x + \dfrac{2}{5}x = 42$;

$5x + 2x = 210$;

$7x = 210$; $\qquad x = 30$.

Pertanto: $S_{ADCE} = 30\ cm^2$ *e* $\qquad S_{BCE} = \frac{2}{5} S_{ADCE} = \frac{2}{5} \cdot 30\ cm^2 = 12\ cm^2$.

Ricaviamo la posizione del punto E.

$$\overline{AE} = \frac{S_{ADCE}}{\overline{DH}} = \frac{30\ cm^2}{3\ cm} = 10\ cm\ .$$

<u>*Soluzione 2*</u>

La somma delle basi del trapezio è: $\overline{AB} + \overline{CD} = \frac{2 \cdot S_{ABCD}}{\overline{DH}} = \frac{2 \cdot 42}{3}\ cm = 28\ cm\ .$

Poniamo $\overline{AE} = \overline{CD} = x$ *con* $D = \{x \in Q\ /\ 0 < x < 14\}\ .$ *Si ricava:*

$\overline{AB} = 28 - \overline{CD} = 28 - x\ .$

$\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 28 - x - x = 28 - 2x\ .$

Dalla relazione: $S_{BCE} = \frac{2}{5} \cdot S_{ADCE}$ *si ottiene:*

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CK} = \frac{2}{5} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{DH}\ ;$$

$$\frac{1}{2} \cdot (28 - 2x) \cdot 3 = \frac{2}{5} \cdot x \cdot 3\ ; \qquad \frac{3}{2} \cdot (28 - 2x) = \frac{6}{5} x\ ;$$

$$42 - 3x = \frac{6}{5} x\ ; \qquad 210 - 15x = 6x\ ;$$

$$-15x - 6x = -210\ ; \qquad 21x = 210\ ; \qquad x = 10\ .$$

Pertanto: $\overline{AE} = 10\ cm,$ *e* $\overline{EB} = (28 - 2 \cdot 10)\ cm = 8\ cm\ .$

$$S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EB} \cdot \overline{CK} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3\ cm^2 = 12\ cm^2\ .$$

$$S_{ADCE} = \overline{AE} \cdot \overline{DH} = 10 \cdot 3\ cm^2 = 30\ cm^2\ .$$

<u>*Verifica*</u>

$$S_{BCE} + S_{ADCE} = S_{ABCD}\ ; \qquad (12 + 30)\ cm^2 = 42\ cm^2\ .$$

<u>*Soluzione 3*</u>

L'area del trapezio è: $S_{ABCD} = 42\ cm^2\ ;$

Quindi: $S_{ADCE} + S_{BCE} = 42\ cm^2;$

Cioè: $S_{ADCE} + \frac{2}{5} S_{ADCE} = 42\ cm^2;$

Poniamo $\overline{AE} = x$ *con* $D = \{x \in Q\ /\ 0 < x < 14\}\ .$ *Si ricava:*

$$3 \cdot x + \frac{2}{5} \cdot 3 \cdot x = 42\ ;$$

$$3x + \frac{6}{5} x = 42\ ;$$

$$15x + 6x = 210\ ;$$

$$21x = 210\ ; \qquad x = 10\ .$$

Pertanto: $\overline{AE} = 10\ cm\ .$

Si ottiene: $S_{ADCE} = \overline{AE} \cdot \overline{DH} = 10 \cdot 3\ cm^2 = 30\ cm^2$

e $S_{BCE} = \frac{2}{5} S_{ADCE} = \frac{2}{5} \cdot 30\ cm^2 = 12\ cm^2\ .$