

Alunno: _____ Classe: 1A L. Scientifico

04 marzo 2021

1. Fattorizza le seguenti espressioni polinomiali:

$$x^8 - 1$$

$$12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$$

2. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{x^2y - 2xy^2}{2y^3 - xy^2}$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 8}$$

$$\frac{a^3 - 1}{(a^2 + 1)^2 - a^2}$$

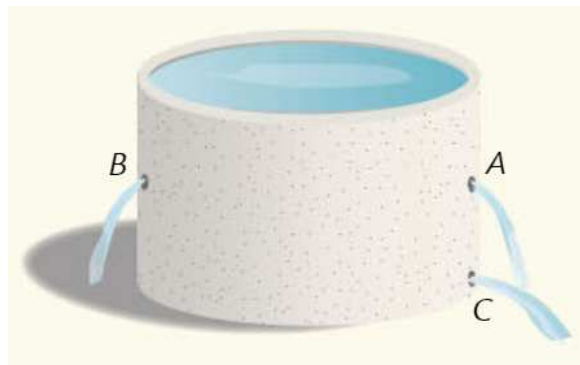
3. Semplifica le seguenti espressioni letterali:

$$\frac{y}{x^2 - xy} - \frac{x}{xy - y^2} + \frac{x - y}{xy}$$

$$\frac{a^6 - a^3b^3}{a^4 - b^2} \cdot \frac{a^2 + b}{a^4 + a^3b + a^2b^2}$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{1}{a-1} + 1 \right) : \left(\frac{1}{a+1} - 1 \right) \right] \cdot \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 2a + 1} + \frac{a^2}{a^2 - 1} \right\} : \frac{2a - 1}{a + 1}$$

4. La cisterna in figura, colma, contiene x litri di acqua. Vi sono due fori, A e B , posti esattamente a mezza altezza, da ciascuno dei quali fuoriescono y litri d'acqua all'ora. Sul fondo è presente un terzo foro, C , dal quale fuoriescono z litri di acqua all'ora. Esprimi mediante una frazione algebrica il tempo (in ore) di svuotamento della cisterna.



Soluzione

1. Fattorizza le seguenti espressioni polinomiali:

$$x^8 - 1 = (x^4 + 1)(x^4 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1).$$

$$\begin{aligned} 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 &= 4x^2(3x - 1) - 1(3x - 1) = (3x - 1) \cdot (4x^2 - 1) = \\ &= (3x - 1) \cdot (2x + 1) \cdot (2x - 1). \end{aligned}$$

2. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{x^2y - 2xy^2}{2y^3 - xy^2} = \frac{xy(x - 2y)}{-y^2(x - 2y)} = -\frac{x}{y}.$$

$$C.E.: y \neq 0 \wedge x \neq 2y$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 8} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{2(x + 2)(x - 2)} = \frac{x + 1}{2(x + 2)}.$$

$$C.E.: x \neq \pm 2$$

$$\frac{a^3 - 1}{(a^2 + 1)^2 - a^2} = \frac{(a - 1)(a^2 + a + 1)}{(a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)} = \frac{a - 1}{a^2 + 1 - a}.$$

$$C.E.: \forall a \in R$$

3. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\frac{y}{x^2 - xy} - \frac{x}{xy - y^2} + \frac{x - y}{xy} =$$

$$C.E.: x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq y$$

$$= \frac{y}{x(x - y)} - \frac{x}{y(x - y)} + \frac{x - y}{xy} = \frac{y^2 - x^2 + (x - y)(x - y)}{xy(x - y)} =$$

$$= \frac{y^2 - x^2 + x^2 - xy - xy + y^2}{xy(x - y)} = \frac{2y^2 - 2xy}{xy(x - y)} = \frac{-2y(x - y)}{xy(x - y)} = -\frac{2}{x}$$

$$\frac{a^6 - a^3b^3}{a^4 - b^2} \cdot \frac{a^2 + b}{a^4 + a^3b + a^2b^2} =$$

$$C.E.: a \neq 0 \wedge b \neq \pm a^2$$

$$= \frac{a^3(a^3 - b^3)}{(a^2 + b)(a^2 - b)} \cdot \frac{a^2 + b}{a^2(a^2 + ab + b^2)} =$$

$$= \frac{a^3(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a^2 + b)(a^2 - b)} \cdot \frac{a^2 + b}{a^2(a^2 + ab + b^2)} =$$

$$= \frac{a(a - b)}{a^2 - b}.$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{1}{a-1} + 1 \right) : \left(\frac{1}{a+1} - 1 \right) \right] \cdot \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 2a + 1} + \frac{a^2}{a^2 - 1} \right\} : \frac{2a - 1}{a + 1} =$$

$$= \left\{ \left[\left(\frac{1 + a - 1}{a - 1} \right) : \left(\frac{1 - (a + 1)}{a + 1} \right) \right] \cdot \frac{(a - 1)^2}{(a + 1)^2} + \frac{a^2}{(a + 1)(a - 1)} \right\} : \frac{2a - 1}{a + 1} =$$

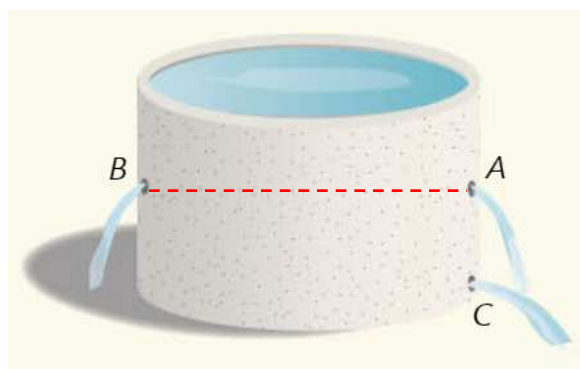
$$= \left\{ \left[\frac{a}{a - 1} : \frac{-a}{a + 1} \right] \cdot \frac{(a - 1)^2}{(a + 1)^2} + \frac{a^2}{(a + 1)(a - 1)} \right\} : \frac{2a - 1}{a + 1} =$$

$$= \left\{ \left[\frac{a}{a - 1} \cdot \frac{a + 1}{-a} \right] \cdot \frac{(a - 1)^2}{(a + 1)^2} + \frac{a^2}{(a + 1)(a - 1)} \right\} : \frac{2a - 1}{a + 1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2} + \frac{a^2}{(a+1)(a-1)} \right\} : \frac{2a-1}{a+1} = \\
&= \left\{ -\frac{a-1}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)(a-1)} \right\} : \frac{2a-1}{a+1} = \\
&= \left\{ \frac{-(a-1)^2 + a^2}{(a+1)(a-1)} \right\} : \frac{2a-1}{a+1} = \\
&= \frac{-a^2 + 2a - 1 + a^2}{(a+1)(a-1)} : \frac{2a-1}{a+1} = \\
&= \frac{2a-1}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1}{2a-1} = \\
&= \frac{1}{a-1}
\end{aligned}$$

$$C.E.: a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1 \wedge a \neq \frac{1}{2}.$$

4. La cisterna in figura, colma, contiene x litri di acqua. Vi sono due fori, A e B , posti esattamente a mezza altezza, da ciascuno dei quali fuoriescono y litri d'acqua all'ora. Sul fondo è presente un terzo foro, C , dal quale fuoriescono z litri di acqua all'ora. Esprimi mediante una frazione algebrica il tempo (in ore) di svuotamento della cisterna.



Soluzione

Il tempo di svuotamento è uguale al rapporto fra la quantità di acqua e la portata di acqua del foro.

L'acqua che si trova al di sopra dei fori A e B viene svuotata dai fori A , B , C .

$$t_1 = \frac{\text{Quantità di acqua}}{\text{Portata A} + \text{Portata B} + \text{Portata C}} = \frac{\frac{x}{2}}{y + y + z} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2y + z} = \frac{x}{2(2y + z)}.$$

L'acqua che si trova al di sotto dei fori A e B viene svuotata solo dal foro C .

$$t_2 = \frac{\text{Quantità di acqua}}{\text{Portata C}} = \frac{\frac{x}{2}}{z} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{x}{2z}.$$

Il tempo di svuotamento totale è:

$$t_1 + t_2 = \frac{x}{2(2y + z)} + \frac{x}{2z} = \frac{xz + x \cdot (2y + z)}{2z(2y + z)} = \frac{xz + 2xy + xz}{2z(2y + z)} = \frac{2xy + 2xz}{2z(2y + z)} = \frac{2x(y + z)}{2z(2y + z)} = \frac{x(y + z)}{z(2y + z)}.$$