

Prova di Matematica : Piano cartesiano e retta

1. Traccia il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \leq -1 \\ 2x + 5 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ 9 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

2. Calcola il perimetro e l'area del triangolo di vertici: $A(4; 1)$, $B(-2; -1)$, $C(1; 5)$.

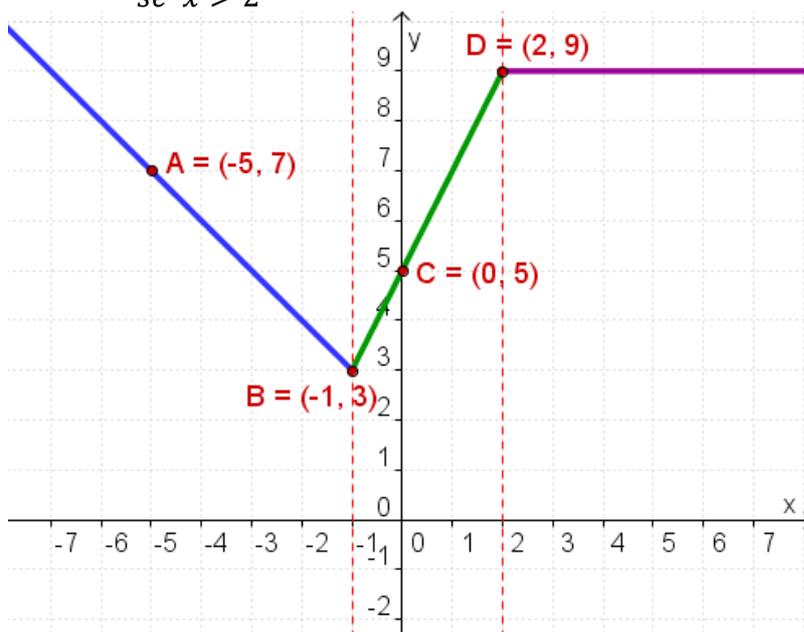
3. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(1; -7)$ e :
 - a. avente ordinata all'origine uguale a -5 ;
 - b. parallela alla retta $s: x - 2 = 0$;
 - c. perpendicolare alla retta $t: 3x - 2y - 5 = 0$;
 - d. passante per il punto $A(-1; 1)$;
 - e. parallela all'asse x .

Soluzione

1. Traccia il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \leq -1 \\ 2x + 5 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ 9 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

	x	y
A	-5	7
B	-1	3

	x	y
C	0	5
D	2	9



2. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(1; -7)$ e :

- avente ordinata all'origine uguale a -5 ;
- parallela alla retta $s: x - 2 = 0$;
- perpendicolare a $t: 3x - 2y - 5 = 0$;
- passante per il punto $A(-1; 1)$;
- parallela all'asse x .

Soluzione

Il fascio di rette proprio passanti per il punto $P(1; -7)$ ha equazione:

$$y - y_P = m(x - x_P); \quad y + 7 = m(x - 1); \quad y + 7 = mx - m; \quad y = mx - m - 7.$$

a. La retta del fascio avente ordinata all'origine -5 si ottiene ponendo $-m - 7 = -5$; $-m = 2$; $m = -2$.

Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene l'equazione della retta richiesta:

$$y = -2x - (-2) - 7; \quad y = -2x - 5.$$

b. La retta del fascio parallela alla retta $x - 2 = 0$ è una retta parallela all'asse y .

Dovendo passare per il punto $P(1; -7)$ la sua equazione è $x = 1$.

c. La retta $t: 3x - 2y - 5 = 0$ ha coefficiente angolare $m_t = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-2} = +\frac{3}{2}$.

La retta del fascio perpendicolare alla retta t si ottiene ponendo $m = -\frac{1}{m_t} = -\frac{2}{3}$.

Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene l'equazione della retta richiesta:

$$y = -\frac{2}{3}x - \left(-\frac{2}{3}\right) - 7; \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} - 7; \quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{19}{3}.$$

d. La retta del fascio passante per il punto $A(-1; 1)$ si ottiene imponendo il passaggio per il punto $A(-1; 1)$

$$1 = m(-1) - m - 7; \quad 1 = -m - m - 7; \quad 2m = -8; \quad m = -4.$$

Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene l'equazione della retta richiesta:

$$y = -4x - (-4) - 7; \quad y = -4x - 3.$$

e. La retta del fascio parallela all'asse x ha equazione del tipo $y = q$.

Dovendo passare per il punto $P(1; -7)$ la sua equazione è $y = -7$.

3. Calcola il perimetro e l'area del triangolo di vertici:

$A(4; 1)$, $B(-2; -1)$, $C(1; 5)$.

Soluzione

La misura del lato AB è

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \\ &= \sqrt{(4 + 2)^2 + (1 + 1)^2} = \\ &= \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

La misura del lato BC è

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \\ &= \sqrt{(1 + 2)^2 + (5 + 1)^2} = \\ &= \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

La misura del lato AC è

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \\ &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 5)^2} = \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Il perimetro del triangolo ABC misura

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2\sqrt{10} + 3\sqrt{5} + 5.$$

L'equazione della retta BC è:

$$\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B}; \quad \frac{y + 1}{5 + 1} = \frac{x + 2}{1 + 2}; \quad \frac{y + 1}{6} = \frac{x + 2}{3}; \quad y + 1 = 2x + 4; \quad y = 2x + 3.$$

Il coefficiente angolare della retta BC è $m_{BC} = 2$.

Essendo la retta AH perpendicolare alla retta BC , $m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{2}$.

L'equazione della retta AH è:

$$y - y_A = m_{AH} \cdot (x - x_A); \quad y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4); \quad y - 1 = -\frac{1}{2}x + 2; \quad y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Le coordinate del punto H sono:

$$H: \begin{cases} BC \\ AH \end{cases} \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \begin{cases} 2x + 3 = -\frac{1}{2}x + 3 \\ 4x + 6 = -x + 6 \end{cases} \begin{cases} 5x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow H(0; 3)$$

La misura dell'altezza AH è

$$\overline{AH} = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

Calcoliamo infine l'area del triangolo ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 15.$$

