Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2017-2018

Classe *2A Liceo Scientifico* — *15 dicembre 2017*

Prova di Matematica : Piano cartesiano e retta

Alunno: ____________________________________ *Classe: 2 A L. Scientifico*

1. Traccia il grafico della funzione $f(x)=\begin{cases} 2 & se\ \ x<-3 \\ x+5 & se\ -3\leq x\leq 1 \\ -2x+8 & se\ \ x>1 \end{cases}$

2. Determina il quarto vertice D del parallelogramma i cui primi tre vertici sono: $\mathrm{A}(4\,;1)$, $\mathrm{B}(-2\,;\,-1)$, $\mathrm{C}(1\,;5)$. Calcola l'area del parallelogramma ABCD.

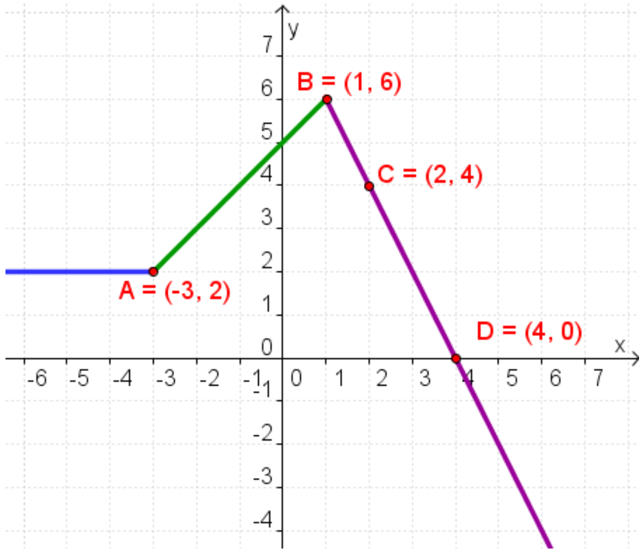
3. Determina la retta del fascio $(k-1)x+(k-2)y+3-k=0$ *:*
   a. parallela all'asse x ;
   b. perpendicolare all'asse x ;
   c. passante per l'origine degli assi cartesiani;
   d. passante per il punto $P(2\,;\,3)$;
   e. parallela alla retta s: $y=-\frac{1}{2}x+4$;
   f. perpendicolare alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Soluzione

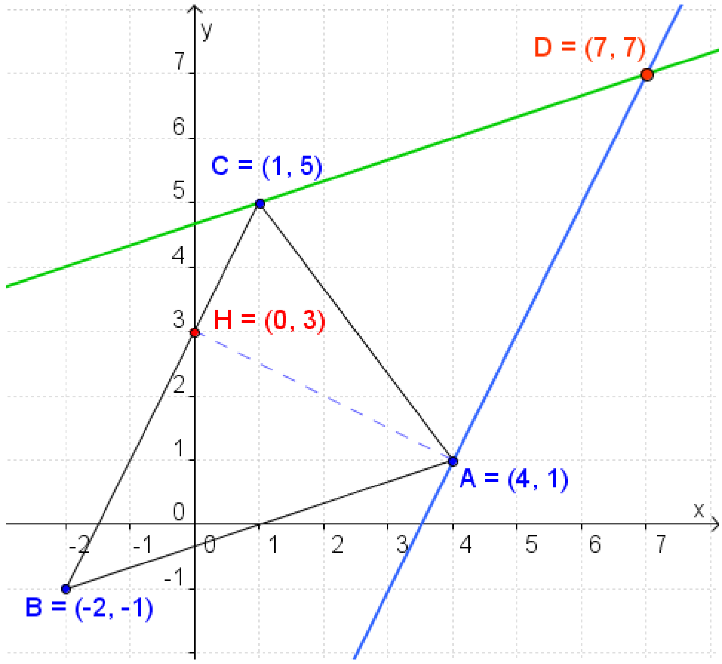
1. Traccia il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} 2 & se\ \ x < -3 \\ x+5 & se\ \ -3 \le x \le 1 \\ -2x+8 & se\ \ x > 1 \end{cases}$

	x	y
A	-3	2
B	1	6

	x	y
C	2	4
D	4	0



3. Determina il quarto vertice D del parallelogramma i cui primi tre vertici sono: $A(4\,;1)$, $B(-2\,;\,-1)$, $C(1\,;5)$. Calcola l'area del parallelogramma ABCD.



Soluzione

L'equazione della retta BC è:

$$\frac{y-y_B}{y_C-y_B} = \frac{x-x_B}{x_C-x_B}\ ; \qquad \frac{y+1}{5+1} = \frac{x+2}{1+2}\ ;$$

$$\frac{y+1}{6} = \frac{x+2}{3}\ ; \qquad y+1 = 2x+4\ ;$$

$$y = 2x+3\,.$$

Il coefficiente angolare della retta BC è $m_{BC} = 2\,.$

Essendo la retta AD parallela alla retta BC, $m_{AD} = 2\,.$

L'equazione della retta AD è :

$$y - y_A = m_{AD}\cdot(x - x_A)\,;$$

$$y - 1 = 2\cdot(x-4)\,;$$

$$y - 1 = 2x - 8\,; \qquad y = 2x - 7\,.$$

Il coefficiente angolare della retta AB è : $m_{AB} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} = \frac{1+1}{4+2} = \frac{1}{3}\,.$

Essendo la retta CD parallela alla retta AB, $m_{CD} = \frac{1}{3}.$

L'equazione della retta CD è : $y - y_C = m_{CD}\cdot(x - x_C)\,;$

$$y-5 = \frac{1}{3}\cdot(x-1)\,; \qquad y-5 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\,; \qquad y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 5\,; \qquad y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}.$$

Le coordinate del punto D sono :

$$D: \begin{cases} CD \\ AD \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3} \\ y = 2x - 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 7 = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3} \\ ---- \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 21 = x + 14 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = 35 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 2\cdot 7 - 7 = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D\ (7\,;7)\,.$$

Essendo la retta AH perpendicolare alla retta BC, $m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{2}$.

L'equazione della retta AH è:

$y - y_A = m_{AH} \cdot (x - x_A)$; $\quad y - 1 = -\dfrac{1}{2} \cdot (x - 4)$; $\quad y - 1 = -\dfrac{1}{2}x + 2$; $\quad y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

Le coordinate del punto H sono :

$$H : \begin{cases} BC \\ AH \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 2x + 3 = -\dfrac{1}{2}x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ 4x + 6 = -x + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ 5x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad H(0\,;3)$$

La misura dell'altezza AH è

$$\overline{AH} = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \ .$$

La misura del lato BC è

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \, .$$

Calcoliamo infine l'area del parallelogramma ABCD:

$$S_{ABCD} = \overline{BC} \cdot \overline{AH} = 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 30 \ .$$

3. Determina la retta del fascio $(k-1)x + (k-2)y + 3 - k = 0$ *:*
    a. parallela all'asse x ;
    b. perpendicolare all'asse x ;
    c. passante per l'origine degli assi cartesiani;
    d. passante per il punto $P(2\,;\,3)$;
    e. parallela alla retta s: $y = -\frac{1}{2}x + 4$;
    f. perpendicolare alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Soluzione

Determiniamo il coefficiente angolare del fascio: $m_F = -\frac{a}{b} = -\frac{k-1}{k-2}$.

Essendo il coefficiente angolare dipendente dal parametro k*, il fascio è proprio.*

Il centro del fascio è il punto $C\,(-1\,;2)$.

Infatti per $k = 2$ *si ottiene* $(2-1)x + (2-2)y + 3 - 2 = 0$; $\quad x + 1 = 0$; $\quad x = -1$.

Mentre per $k = 1$ *si ottiene* $(1-1)x + (1-2)y + 3 - 1 = 0$; $\quad -y + 2 = 0$; $\quad y = 2$.

a. La retta del fascio parallela all'asse x *si ottiene quando il coefficiente della variabile* x *è nullo.*

Cioè quando $k - 1 = 0$; $\quad k = 1$.

Sostituendo si ottiene: $(1-1)x + (1-2)y + 3 - 1 = 0$; $\quad -y + 2 = 0$; $\quad y = 2$.

b. La retta del fascio perpendicolare all'asse x *si ottiene quando il coefficiente della variabile* y *è nullo.*

Cioè quando $k - 2 = 0$; $\quad k = 2$.

Sostituendo si ottiene: $(2-1)x + (2-2)y + 3 - 2 = 0$; $\quad x + 1 = 0$; $\quad x = -1$.

c. La retta del fascio passante per l'origine degli assi cartesiani si ottiene quando il termine noto è nullo.

Cioè quando $3 - k = 0$; $\quad k = 3$.

Sostituendo si ottiene: $(3-1)x + (3-2)y + 3 - 3 = 0$; $\quad 2x + y = 0$.

d. *La retta del fascio passante per passante per il punto* $P(2\ ;\ 3)$ *si ottiene imponendo il passaggio per il punto.*

Cioè sostituendo le coordinate del punto $(2\ ;\ 3)$ *nell'equazione del fascio. Si ottiene:*

$(k-1)\cdot 2+(k-2)\cdot 3+3-k=0\ ;$

$2k-2+3k-6+3-k=0\ ;\qquad 2k+3k-k=2+6-3\ ;\qquad 4k=5\ ;\qquad k=\frac{5}{4}.$

Sostituendo tale valore si ricava l'equazione della retta richiesta : $\left(\frac{5}{4}-1\right)x+\left(\frac{5}{4}-2\right)y+3-\frac{5}{4}=0\ ;$

$\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\,y+\frac{7}{4}=0\ ;\qquad x-3\,y+7=0\ .$

e. *La retta del fascio parallela alla retta* s: $y=-\frac{1}{2}x+4$ *si ottiene ponendo* $m_F=m_s$.

$-\dfrac{k-1}{k-2}=-\dfrac{1}{2}\ ;\qquad \dfrac{k-1}{k-2}=\dfrac{1}{2}\ ;\qquad 2\cdot(k-1)=k-2\ ;\quad 2k-2=k-2\ ;\quad k=0\ .$

Sostituendo si ottiene: $(0-1)x+(0-2)y+3-0=0\ ;\qquad -x-2y+3=0\ ;\qquad -2y=x-3\qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$

f. *La retta del fascio perpendicolare alla bisettrice del primo e terzo quadrante* $y=x$
si ottiene ponendo $m_F=-\frac{1}{m_b}=-1$.

$-\dfrac{k-1}{k-2}=-1\ ;\qquad \dfrac{k-1}{k-2}=1\ ;\qquad k-1=k-2\ ;\qquad 0\,k=-1\ ;\qquad \nexists\ k\in \mathbb{R}\ .$