Prova di Matematica : Numeri reali e radicali

Alunno: ____ Classe: 2A L. Scientifico 27 marzo 2018

1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$3x^2 - 2x + 4 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 2x - 2\sqrt{2} - 2 = 0$ $\qquad$ $\dfrac{x+7}{3x^2 - 7x + 2} - \dfrac{3-x}{x-2} = -2$

2. Determina per quali valori del parametro k l'equazione $kx^2 + 2(1-k)x + k + 1 = 0 \qquad (k \neq 0)$

a. ha radici reali;
b. ha una radice uguale a zero;
c. ha radici uguali;
d. ha radici tali che la somma dei loro reciproci è 1;

3. Risolvi e discuti la seguente equazione:

$$\frac{1}{a-1} + \frac{x^2}{2x-1} + \frac{ax}{1-a} = 0 \ ;$$

4. Un rettangolo ABCD è tale che $\overline{AB} = 8\ cm$ e $\overline{BC} = 6\ cm$. Determina un punto P sul segmento AB in modo che, condotta per P la retta passante per il centro del rettangolo, e indicato con il suo punto di intersezione con il lato CD, la somma dei quadrati costruiti sui lati del trapezio APQD sia uguale a $110\ cm^2$.

SOLUZIONE

1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$3x^2-2x+4=0\,;$ $\qquad \frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\cdot c=(-1)^2-3\cdot 4=1-12=-11\,;$

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{1\mp\sqrt{-11}}{3}=\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1-\sqrt{11}\,i}{3} \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{11}\,i}{3}\end{array}$$

$x^2+2x-2\sqrt{2}-2=0\,;$ $\qquad \frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-a\cdot c=1^2-1\cdot\left(-2\sqrt{2}-2\right)=3+2\sqrt{2}\,;$

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{-1\mp\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{1}=-1\mp\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}=\begin{array}{l} x_1=-1-\left(1+\sqrt{2}\right)=-2-\sqrt{2} \\ x_2=-1+\left(1+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\end{array}$$

$$\frac{x+7}{3x^2-7x+2}-\frac{3-x}{x-2}=-2\;;$$

Fattorizziamo $\quad 3x^2-7x+2=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)=(3x-1)(x-2)$

Calcoli: $3x^2-7x+2=0\,;\qquad \Delta=49-24=25\,;\qquad x_{1,2}=\frac{7\mp\sqrt{25}}{2\cdot 3}=\begin{array}{l} x_1=\frac{7-5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\ x_2=\frac{7+5}{6}=\frac{12}{6}=2\end{array}$

$$\frac{x+7}{(3x-1)(x-2)}-\frac{3-x}{x-2}=-2\,;$$ $\qquad C.E.:\; x\neq\frac{1}{3}\quad\wedge\quad x\neq 2$

$x+7-(3-x)(3x-1)=-2\cdot(3x-1)(x-2)\,;$ $\qquad m.c.m.=(a-1)(2x-1)$

$x+7-(9x-3-3x^2+x)=-2\cdot(3x^2-6x-x+2)\,;$

$x+7-9x+3+3x^2-x=-6x^2+12x+2x-4\,;$

$x+7-9x+3+3x^2-x+6x^2-12x-2x+4=0;$

$9x^2-23x+14=0;\qquad \Delta=(-23)^2-4\cdot 9\cdot 14=529-504=25$

$$x_{1,2}=\frac{23\mp\sqrt{25}}{2\cdot 9}=\begin{array}{ll} x_1=\dfrac{23-5}{18}=\dfrac{18}{18}=1 & \textit{Accettabile} \\ x_2=\dfrac{23+5}{18}=\dfrac{28}{18}=\dfrac{14}{9} & \textit{Accettabile}\end{array}$$

2. Determina per quali valori del parametro k l'equazione $kx^2+2(1-k)x+k+1=0$

a. ha radici reali;
b. ha una radice uguale a zero;
c. ha radici uguali;
d. ha radici tali che la somma dei loro reciproci è 1;
e. ha radici tali che la somma dei loro quadrati è 16.

I coefficienti dell'equazione sono: $A=k\,;\quad B=2(1-k)\,;\quad C=k+1$

a. *L'equazione ha soluzioni reali se* $\Delta\geq 0$:

$\frac{\Delta}{4}\geq 0\,;\qquad (1-k)^2-k\cdot(k+1)\geq 0\,;\qquad 1+k^2-2k-k^2-k\geq 0\,;\qquad 1-3k\geq 0\,;\qquad k\leq\frac{1}{3}\,.$

b. *L'equazione ha una radice uguale a zero se* $C=0\,;\qquad k+1=0\,;\qquad k=-1\,.$

c. *L'equazione ha radici uguali se* $\Delta=0\,;\qquad k=\frac{1}{3}\,.$

d. *L'equazione ha radici tali che la somma dei loro reciproci è 1 :*

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1\,; \qquad \frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=1\,; \qquad \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=1\,; \qquad -\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}=1\,; \qquad -\frac{b}{c}=1\,; \qquad -\frac{2(1-k)}{k+1}=1\,;$$

$-2(1-k)=k+1\,; \qquad -2+2k=k+1\,; \qquad k=3$ *Non accettabile .*

e. *L'equazione ha radici tali che la somma dei loro quadrati è 16 :*

$$x_1^2+x_2^2=16\,; \qquad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16\,; \qquad \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=16\,; \qquad \frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=16\,;$$

$$\frac{b^2-2ac}{a^2}=16\,; \qquad \frac{[2(1-k)]^2-2k(k+1)}{k^2}=16\,; \qquad \frac{(2-2k)^2-2k^2-2k}{k^2}=16\,;$$

$4+4k^2-8k-2k^2-2k=16k^2\,; \qquad -14k^2-10k+4=0\,; \qquad 7k^2+5k-2=0\,;$

$\Delta = 5^2-4\cdot 7\cdot(-2) = 25+56=81\,.$

$$k_{1,2}=\frac{-5\mp\sqrt{81}}{2\cdot 7}= \begin{cases} k_1=\frac{-5-9}{14}=-1 & \textit{Accettabile} \\ k_2=\frac{-5+9}{14}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7} & \textit{Accettabile}\end{cases}$$

3. Risolvi e discuti la seguente equazione:

$$\frac{1}{a-1}+\frac{x^2}{2x-1}+\frac{ax}{1-a}=0\,; \qquad C.E.(P):\ a\neq 1 \qquad C.A.(x):\ x\neq\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{a-1}+\frac{x^2}{2x-1}-\frac{ax}{a-1}=0 \qquad m.c.m.=(a-1)(2x-1)$$

$2x-1+x^2\cdot(a-1)-ax\cdot(2x-1)=0\,;$

$2x-1+ax^2-x^2-2ax^2+ax=0\,;$

$(-a-1)x^2+(a+2)x-1=0\,;$

$(a+1)x^2-(a+2)x+1=0\,; \qquad A=a+1\,; \quad B=-(a+2)\,; \quad C=1$

Per $a=-1$ *l'equazione diventa di I grado* $-(-1+2)x+1=0\,; \quad -x=-1\,; \quad x=1\,.$

$\Delta = B^2-4\cdot A\cdot C = (-a-2)^2-4\cdot(a+1)\cdot 1 = a^2+4+4a-4a-4 = a^2$

$\Delta<0\,; \quad a^2<0 \quad \nexists\, a\in R\,.$

$$\Delta=0\,; \quad a^2=0\,; \quad a=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{a+2\mp\sqrt{0}}{2\cdot(a+1)}=\frac{2}{2}=1\,.$$

$$\Delta>0\,; \quad a^2>0\,; \quad \forall\, a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-B\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot A}=\frac{a+2\mp\sqrt{a^2}}{2\cdot(a+1)}=$$

$$= \begin{cases} x_1=\frac{a+2-a}{2\cdot(a+1)}=\frac{2}{2\cdot(a+1)}=\frac{1}{a+1} \\ x_2=\frac{a+2+a}{2\cdot(a+1)}=\frac{2\cdot(a+1)}{2\cdot(a+1)}=1\end{cases}$$

Tali soluzioni sono accettabili se soddisfano le condizioni di accettabilità $x\neq\frac{1}{2}$

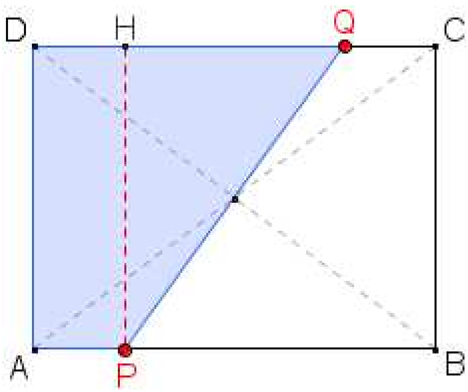
$x_1\neq\frac{1}{2}\,; \qquad \frac{1}{a+1}\neq\frac{1}{2}\,; \qquad 2\neq a+1\,; \qquad a\neq 1\,.$

$x_2\neq\frac{1}{2}\,; \qquad 1\neq\frac{1}{2}\,; \qquad \forall a\in R\,.$

Riepilogando:

Parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a = 1$	*Perde significato*	-
$a = -1$	*Equazione di I° grado*	$x = 1$
$\nexists\, a \in R$	*Equazione Completa con* $\Delta < 0$	-
$a = 0$	*Equazione Completa con* $\Delta = 0$	$x_{1,2} = 1$
$a \neq \pm 1 \ \wedge \ a \neq 0$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	*Due soluzioni reali e distinte* $x_1 = \frac{1}{a+1} \ \wedge \ x_2 = 1$

4. Un rettangolo ABCD è tale che $\overline{AB} = 8\ cm$ e $\overline{BC} = 6\ cm$. Determina un punto P sul segmento AB in modo che, condotta per P la retta passante per il centro del rettangolo, e indicato con Q il suo punto di intersezione con il lato CD, la somma dei quadrati costruiti sui lati del trapezio APQD sia uguale a $110\ cm^2$.



Soluzione

Poniamo la misura del segmento $\overline{AP} = x$ *con* $x \in R^+$.
Si ottiene: $\overline{DH} = x$, $\overline{QC} = x$, $\overline{DQ} = 8 - x$ *e* $\overline{HQ} = 8 - 2x$.
Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PQH.

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HQ}^2} = \sqrt{6^2 + (8-2x)^2} = \sqrt{6^2 + 64 + 4x^2 - 32x} = \sqrt{100 + 4x^2 - 32x}$$

Utilizzando la relazione data si ottiene:

$\overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{DQ}^2 + \overline{AD}^2 = 110\ cm^2$;

$x^2 + 100 + 4x^2 - 32x + (8-x)^2 + 6^2 = 110$;

$x^2 + 100 + 4x^2 - 32x + 64 + x^2 - 16x + 36 = 110$;

$6x^2 - 48x + 90 = 0$;

$3x^2 - 24x + 45 = 0$; $\qquad \Delta = (-12)^2 - 3 \cdot 45 = 144 - 135 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{12 \mp \sqrt{9}}{3} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{12-3}{3} = \dfrac{9}{3} = 3 & \textit{Accettabile} \\ x_2 = \dfrac{12+3}{3} = \dfrac{15}{3} = 5 & \textit{Accettabile} \end{cases}$$

Pertanto il punto P si può trovare in due posizioni tali che : $\overline{AP} = 3\ cm$ *o* $\overline{AP} = 5\ cm$.