

Prova di Matematica : Frazioni Algebriche

Alunno: _____ Classe: 1 A L. Scientifico

1. Fattorizza le seguenti espressioni polinomiali:

$$27a^3 - 54a^2b^2 + 36ab^4 - 8b^6$$

$$3a^4x^2 - 3ab^3x^2 - 3a^4y^2 + 3ab^3y^2$$

$$6a^2 + ab - 2b^2$$

$$4x^4y^4 - 12x^2y^2 + 9$$

2. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{4x^2 - y^2}{8x^3 - y^3}$$

$$\frac{6x^3 + x - 13x^2 + 2}{2x^2 - 5x + 2}$$

3. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\left(\frac{1}{x^3 - 1000} + \frac{1}{x^2 + 10x + 100} \right) : \frac{x^3 + x^2 - 90x}{x^3 + 10x^2 + 100x} : \frac{1}{x^2 - 20x + 100}$$

$$\left[\frac{a+b}{a^2b - ab^2} : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a-b} \right) \right] \cdot \left[1 - \frac{b}{a+b} - \left(\frac{b}{a+b} \right)^2 \right]$$

$$\left(\frac{x^n + 1}{x^{2n} - x^n} - \frac{x^n}{x^{2n} - 1} \right)^2 : \frac{x^n + 2x^{2n}}{x^{5n} + 2x^{4n} + x^{3n}}$$

4. Carlotta, nel periodo di Natale, lavora come commessa in un negozio di calzature e guadagna 8 euro all'ora più una commissione del 5% sul ricavo totale delle scarpe che riesce a vendere. Quale formula esprime il suo guadagno G, se lavora h ore e vende scarpe per un valore di x euro.

Soluzione

1. Fattorizza le seguenti espressioni polinomiali:

$$4x^4y^4 - 12x^2y^2 + 9 = (2x^2y^2 - 3)^2$$

$$27a^3 - 54a^2b^2 + 36ab^4 - 8b^6 = (3a - 2b^2)^3$$

$$6a^2 + ab - 2b^2 = 6a^2 + 4ab - 3ab - 2b^2 = 2a \cdot (3a + 2b) - b \cdot (3a + 2b) = (2a - b) \cdot (3a + 2b)$$

$$3a^4x^2 - 3ab^3x^2 - 3a^4y^2 + 3ab^3y^2 = 3a \cdot (a^3x^2 - b^3x^2 - a^3y^2 + b^3y^2) =$$

$$= 3a \cdot [x^2 \cdot (a^3 - b^3) - y^2 \cdot (a^3 - b^3)] = 3a \cdot (a^3 - b^3) \cdot (x^2 - y^2) =$$

$$= 3a \cdot (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \cdot (x + y) \cdot (x - y)$$

2. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{4x^2 - y^2}{8x^3 - y^3}$$

$$\frac{6x^3 + x - 13x^2 + 2}{2x^2 - 5x + 2}$$

$$\frac{4x^2 - y^2}{8x^3 - y^3} = \frac{(2x + y)(2x - y)}{(2x - y) \cdot (4x^2 + 2xy + y^2)} = \frac{2x + y}{4x^2 + 2xy + y^2}$$

$$C.E.: x \neq \frac{1}{2}y \quad \wedge \quad (x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0)$$

$$\frac{6x^3 + x - 13x^2 + 2}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{(x - 2) \cdot (2x - 1) \cdot (3x + 1)}{(2x - 1) \cdot (x - 2)} = 3x + 1$$

$$C.E.: x \neq 2 \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{2}$$

Calcoli:

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$6x^3 - 13x^2 + x + 2 = (x - 2)(6x^2 - x - 1) =$$

	6	-13	+1	+2
2		+12	-2	-2
	6	-1	-1	0

$$= (x - 2) \cdot (6x^2 - 3x + 2x - 1) = (x - 2) \cdot [3x \cdot (2x - 1) + 1 \cdot (2x - 1)] = (x - 2) \cdot (2x - 1) \cdot (3x + 1)$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 - x - 4x + 2 = x \cdot (2x - 1) - 2 \cdot (2x - 1) = (2x - 1) \cdot (x - 2)$$

3. Semplifica le seguenti espressioni :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x^3 - 1000} + \frac{1}{x^2 + 10x + 100} \right) : \frac{x^3 + x^2 - 90x}{x^3 + 10x^2 + 100x} : \frac{1}{x^2 - 20x + 100} = \\ & = \left(\frac{1}{(x - 10)(x^2 + 10x + 100)} + \frac{1}{x^2 + 10x + 100} \right) : \frac{x \cdot (x^2 + x - 90)}{x \cdot (x^2 + 10x + 100)} : \frac{1}{(x - 10)^2} = \\ & = \frac{1 + x - 10}{(x - 10)(x^2 + 10x + 100)} : \frac{(x - 9) \cdot (x + 10)}{x^2 + 10x + 100} : \frac{1}{(x - 10)^2} = \\ & = \frac{x - 9}{(x - 10)(x^2 + 10x + 100)} \cdot \frac{x^2 + 10x + 100}{(x - 9) \cdot (x + 10)} \cdot (x - 10)^2 = \\ & = \frac{1}{x - 10} \cdot \frac{1}{x + 10} \cdot (x - 10)^2 = \\ & = \frac{x - 10}{x + 10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{a+b}{a^2b-ab^2} : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a-b} \right) \right] \cdot \left[1 - \frac{b}{a+b} - \left(\frac{b}{a+b} \right)^2 \right] = \quad \text{C.E.: } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b \\
& = \left[\frac{a+b}{ab \cdot (a-b)} : \frac{b \cdot (a-b) + a \cdot (a-b) + 1}{ab \cdot (a-b)} \right] \cdot \left[1 - \frac{b}{a+b} - \frac{b^2}{(a+b)^2} \right] = \\
& = \frac{a+b}{ab \cdot (a-b)} : \frac{ab - b^2 + a^2 - ab + ab}{ab \cdot (a-b)} \cdot \frac{(a+b)^2 - b \cdot (a+b) - b^2}{(a+b)^2} = \\
& = \frac{a+b}{ab \cdot (a-b)} : \frac{a^2 + ab - b^2}{ab \cdot (a-b)} \cdot \frac{a^2 + b^2 + 2ab - ab - b^2 - b^2}{(a+b)^2} = \\
& = \frac{a+b}{ab \cdot (a-b)} \cdot \frac{ab \cdot (a-b)}{a^2 + ab - b^2} \cdot \frac{a^2 + ab - b^2}{(a+b)^2} = \\
& = \frac{1}{a+b} .
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^n + 1}{x^{2n} - x^n} - \frac{x^n}{x^{2n} - 1} \right)^2 : \frac{x^n + 2x^{2n}}{x^{5n} + 2x^{4n} + x^{3n}} =$$

se n è dispari C.E.: $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1 \wedge x \neq -\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

se n è pari C.E.: $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}
& = \left(\frac{x^n + 1}{x^n \cdot (x^n - 1)} - \frac{x^n}{(x^n + 1) \cdot (x^n - 1)} \right)^2 : \frac{x^n \cdot (1 + 2x^n)}{x^{3n} \cdot (x^{2n} + 2x^n + 1)} = \\
& = \left(\frac{(x^n + 1) \cdot (x^n + 1) - x^n \cdot x^n}{x^n \cdot (x^n + 1) \cdot (x^n - 1)} \right)^2 : \frac{1 + 2x^n}{x^{2n} \cdot (x^n + 1)^2} = \\
& = \left(\frac{x^{2n} + 1 + 2x^n - x^{2n}}{x^n \cdot (x^n + 1) \cdot (x^n - 1)} \right)^2 : \frac{1 + 2x^n}{x^{2n} \cdot (x^n + 1)^2} = \\
& = \left(\frac{1 + 2x^n}{x^n \cdot (x^n + 1) \cdot (x^n - 1)} \right)^2 : \frac{1 + 2x^n}{x^{2n} \cdot (x^n + 1)^2} = \\
& = \left(\frac{1 + 2x^n}{x^n \cdot (x^n + 1) \cdot (x^n - 1)} \right)^2 : \frac{1 + 2x^n}{x^{2n} \cdot (x^n + 1)^2} = \\
& = \frac{(1 + 2x^n)^2}{x^{2n} \cdot (x^n + 1)^2 \cdot (x^n - 1)^2} \cdot \frac{x^{2n} \cdot (x^n + 1)^2}{1 + 2x^n} = \\
& = \frac{1 + 2x^n}{(x^n - 1)^2} .
\end{aligned}$$

4. Carlotta, nel periodo di Natale, lavora come commessa in un negozio di calzature e guadagna 8 euro all'ora più una commissione del 5% sul ricavo totale delle scarpe che riesce a vendere. Quale formula esprime il suo guadagno G, se lavora h ore e vende scarpe per un valore di x euro.

$$G = 8h + \frac{5}{100}x$$