Prova di Matematica : Sistemi lineari e matrici 10.11.2016

(tempi: 1 ora)

Alunno: ________________________________ *Classe: 2C* *L. Scientifico S. Applicate*

1. Determina il grado dei seguenti sistemi.	
$\begin{cases}(x+1)^2 = x\cdot(x^2+y)\\ 6x+5xy=12\end{cases}$	$\begin{cases}xy-3y=2\\ x+xy=0\end{cases}$
Sistema di _____ grado	Sistema di ____ grado

2. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema.			
$\begin{cases}xy+y=6\\ 3y-4x=5\end{cases}$	$\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$	$\begin{cases}x+3y=7\\ 3x-6y=9\end{cases}$	$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$
☐ **SI** ☐ **NO**		☐ **SI** ☐ **NO**	

3. Indica senza risolverli quale dei seguenti sistemi è determinato, quale è indeterminato e quale è impossibile.

$\begin{cases}3x-2y-6=0\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=-1\end{cases}$ Sistema ____________	$\begin{cases}12y-8x=\frac{2}{3}\\ 2x-3y+\frac{1}{6}=0\end{cases}$ Sistema ____________	$\begin{cases}\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}\\ 2x+4y=1\end{cases}$ Sistema ____________
$\frac{a}{a'}=$ $\frac{b}{b'}=$ $\frac{c}{c'}=$	$\frac{a}{a'}=$ $\frac{b}{b'}=$ $\frac{c}{c'}=$	$\frac{a}{a'}=$ $\frac{b}{b'}=$ $\frac{c}{c'}=$

4. Risolvi il seguente sistema di equazioni con tre diversi metodi (a tua scelta) :

$$\begin{cases}\frac{3x+5}{4}-y-\frac{5}{3}=2x+\frac{1}{3}\\ \frac{x-4}{3}-\frac{3}{2}y=2\end{cases}$$

5. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y :

$$\begin{cases}k(x+3y)-18=0\\ 2x+k(y-1)=0\end{cases}$$

6. Esegui la seguente moltiplicazione tra le due matrici (righe per colonne):

$$\begin{bmatrix}0 & +2\\ +3 & -1\\ -2 & +1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4 & +1 & 0\\ +1 & -1 & +2\end{bmatrix}$$

7. Determina la matrice inversa della matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{+1} & \mathbf{+2}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{+3}\end{bmatrix}$

8. Risolvi il seguente problema

L'azienda "Coffy and Coffy" produce 120 kg di caffè al giorno per un costo complessivo di produzione di 670 € , che vende con un ricavo complessivo di 1040€.

A. Determina le quantità di caffè *Excelsa, Robusta* e *Liberica* prodotte ogni giorno dall'azienda.
B. Un giorno, per un problema su una macchina, la ditta produce il 50% in meno del caffè del tipo « *Robusta* ». Volendo produrre sempre la stessa quantità totale di caffè, come occorre modificare le altre produzioni di *Excelsa* e *Liberica* per ottenere lo stesso ricavo?

Tipologia	Costo di produzione (per kg)	Prezzo di vendita (per kg)
caffè Excelsa	4€	6€
caffè Robusta	5€	8€
caffè Liberica	9€	14€

Soluzione

1. Determina il grado dei seguenti sistemi	
$\begin{cases}(x+1)^2 = x\cdot(x^2+y)\\ 6x+5xy=12\end{cases}$	$\begin{cases}xy-3y=2\\ x+xy=0\end{cases}$
Sistema di **6°**grado	Sistema di **4°**grado

2. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema	
$\begin{cases}xy+y=6\\ 3y-4x=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$	$\begin{cases}x+3y=7\\ 3x-6y=9\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$
SI	**NO**

3. Indica senza risolverli quale dei seguenti sistemi è determinato, quale è indeterminato e quale è impossibile

$\begin{cases}3x-2y-6=0\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=-1\end{cases}$ Sistema Impossibile	$\begin{cases}12y-8x=\frac{2}{3}\\ 2x-3y+\frac{1}{6}=0\end{cases}$ Sistema Indeterminato	$\begin{cases}\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}\\ 2x+4y=1\end{cases}$ Sistema Determinato
$\frac{a}{a'}=6$ $\frac{b}{b'}=6$ $\frac{c}{c'}=-6$	$\frac{a}{a'}=-4$ $\frac{b}{b'}=-4$ $\frac{c}{c'}=-4$	$\frac{a}{a'}=-\frac{1}{8}$ $\frac{b}{b'}=+\frac{1}{8}$

4. Risolvi il seguente sistema di equazioni con tre diversi metodi *(a tua scelta)* **:**

$$\begin{cases}\frac{3x+5}{4}-y-\frac{5}{3}=2x+\frac{1}{3}\\ \frac{x-4}{3}-\frac{3}{2}y=2\end{cases} \qquad \begin{cases}9x+15-12y-20=24x+4\\ 2x-8-9y=12\end{cases} \qquad \begin{cases}-15x-12y=9\\ 2x-9y=20\end{cases}$$

$$\begin{cases}5x+4y=-3\\ 2x-9y=20\end{cases} \qquad \left(\frac{a}{a^I}=\frac{5}{2}\right)\neq\left(\frac{b}{b^I}=-\frac{4}{9}\right) \qquad \textit{Sistema determinato}$$

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases}5x+4y=-3\\ 2x-9y=20\end{cases} \quad \begin{cases}---\\ 2x=9y+20\end{cases} \quad \begin{cases}---\\ x=\frac{9}{2}y+10\end{cases} \quad \begin{cases}5\left(\frac{9}{2}y+10\right)+4y=-3\\ ---\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{45}{2}y+50+4y=-3\\ ---\end{cases}$$

$$\begin{cases}45y+100+8y=-6\\ ---\end{cases} \quad \begin{cases}53y=-106\\ ---\end{cases} \quad \begin{cases}y=-2\\ ---\end{cases} \quad \begin{cases}x=\frac{9}{2}(-2)+10=-9+10=1\\ y=-2\end{cases} \quad \begin{cases}x=+1\\ y=-2\end{cases}$$

Metodo di Grafico

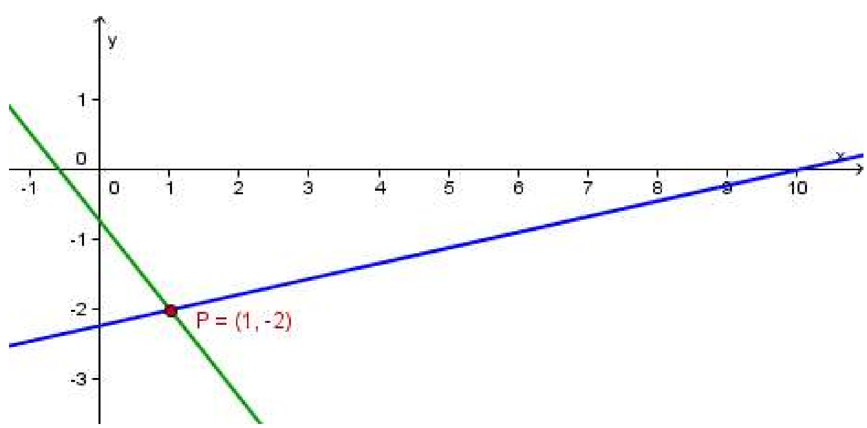
$$\begin{cases}5x+4y=-3\\ 2x-9y=20\end{cases}$$

$5x+4y=-3$

x	y
0	$-\frac{3}{4}$
$-\frac{5}{3}$	0

$-9y=20$

x	y
0	$-\frac{20}{9}$
10	0



Metodo del confronto

$$\begin{cases}5x+4y=-3\\ 2x-9y=20\end{cases} \quad \begin{cases}5x=-4y-3\\ 2x=9y+20\end{cases} \quad \begin{cases}x=-\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}\\ x=\frac{9}{2}y+10\end{cases} \quad \begin{cases}---\\ \frac{9}{2}y+10=-\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}\end{cases} \quad \begin{cases}---\\ 45y+100=-8y-6\end{cases}$$

$$\begin{cases}---\\ 53y=-106\end{cases} \quad \begin{cases}---\\ y=-2\end{cases} \quad \begin{cases}x=\frac{9}{2}(-2)+10=-9+10=1\\ y=-2\end{cases} \quad \begin{cases}x=+1\\ y=-2\end{cases}$$

Metodo di riduzione

$$\begin{matrix} 2\cdot \\ 5\cdot \end{matrix}\begin{cases} 5x+4y=-3 \\ 2x-9y=20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x+8y=-6 \\ 10x-45y=100 \end{cases} \begin{matrix} - \\ = \end{matrix}$$

$$53y=-106; \qquad y=-2$$

$$\begin{matrix} 9\cdot \\ 4\cdot \end{matrix}\begin{cases} 5x+4y=-3 \\ 2x-9y=20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 45x+36y=-27 \\ 8x-36y=80 \end{cases} \begin{matrix} + \\ = \end{matrix}$$

$$53x=53; \qquad x=+1$$

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} 5x+4y=-3 \\ 2x-9y=20 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 5 & +4 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}=5\cdot(-9)-2\cdot 4=-45-8=-53$$

$$Dx=\begin{vmatrix} -3 & +4 \\ 20 & -9 \end{vmatrix}=-3\cdot(-9)-20\cdot 4=27-80=-53$$

$$Dy=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 20 \end{vmatrix}=5\cdot 20-2\cdot(-3)=100+6=106$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{-53}{-53}=+1 \\ y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{106}{-53}=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=+1 \\ y=-2 \end{cases}$$

5. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y :

$$\begin{cases} k(x+3y)-18=0 \\ 2x+k(y-1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} kx+3ky=18 \\ 2x+ky=k \end{cases}$$

Il determinante del sistema è $D=\begin{vmatrix} k & 3k \\ 2 & k \end{vmatrix}=k^2-6k=k\cdot(k-6)$

Il determinante $D_x=\begin{vmatrix} 18 & 3k \\ k & k \end{vmatrix}=18k-3k^2=-3k\cdot(k-6)$

Il determinante $D_y=\begin{vmatrix} k & 18 \\ 2 & k \end{vmatrix}=k^2-36=(k+6)\cdot(k-6)$

Discussione

Se $D=0$ *cioè se* $k\cdot(k-6)=0$

$k=0 \qquad D_x=0 \ \wedge \ D_y=-36 \qquad S.\,impossibile$

$k=6 \qquad D_x=0 \ \wedge \ D_y=0 \qquad S.\,indeterminato$

Se $D\neq 0$ *cioè* $k\neq 0 \ \wedge \ k\neq 6$ *il sistema è determinato, e la soluzione è :*

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-3k\cdot(k-6)}{k\cdot(k-6)}=-3 \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{(k+6)\cdot(k-6)}{k\cdot(k-6)}=\dfrac{k+6}{k} \end{cases}$$

Riassumendo si ha:

Parametro	***Tipo***	***Soluzione***
$k=0$	*Sistema impossibile*	$\emptyset$
$k=6$	*Sistema indeterminato*	∞
$k\neq 0 \ \wedge \ k\neq 6$	*Sistema determinato*	$\left(x=-3 \ ; \ y=\dfrac{k+6}{k}\right)$

6. **Esegui la seguente moltiplicazione** *(righe per colonne)* **tra matrici:**

$$\begin{bmatrix} 0 & +2 \\ +3 & -1 \\ -2 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & +2 \end{bmatrix}$$

<u>*Soluzione*</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & +2 \\ +3 & -1 \\ -2 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \\ (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 1 & (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -13 & 4 & -2 \\ 9 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

7. **Determina la matrice inversa della matrice** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{+1} & \mathbf{+2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{+3} \end{bmatrix}$

<u>*Soluzione*</u>

Calcoliamo innanzitutto il determinante della matrice A :

$|A| = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 7$

Essendo il determinante della matrice A diverso da zero, la matrice è invertibile.

Calcoliamo i complementi algebrici della matrice A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = +2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = +1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} +3 & +2 \\ -2 & +1 \end{bmatrix}$

Calcoliamo la matrice trasposta dei complementi algebrici: $\qquad C^T = \begin{bmatrix} +3 & -2 \\ +2 & +1 \end{bmatrix}$

Pertanto la matrice inversa è:

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A} \cdot C^T = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ +\frac{2}{7} & +\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

L'azienda "Coffy and Coffy" produce 120 kg di caffè al giorno per un costo complessivo di produzione di 670 € , che vende con un ricavo complessivo di 1040€.

A. Determina le quantità di caffè *Excelsa, Robusta* e *Liberica* prodotte ogni giorno dall'azienda.
B. Un giorno, per un problema su una macchina, la ditta produce il 50% in meno del caffè del tipo « *Robusta* ». Volendo produrre sempre la stessa quantità totale di caffè, come occorre modificare le altre produzioni di *Excelsa* e *Liberica* per ottenere lo stesso ricavo?

Tipologia	Costo di produzione (per kg)	Prezzo di vendita (per kg)
caffè Excelsa	4€	6€
caffè Robusta	5€	8€
caffè Liberica	9€	14€

Soluzione A

Poniamo la quantità di caffè $Excelsa = x$, *la quantità di caffè* $Robusta = y$, *e la quantità di caffè* $Liberica = z$

con $x, y, z \in R^+$.

Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ 4x + 5y + 9z = 670 \\ 6x + 8y + 14z = 1040 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 120 - x - y \\ --- \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 4x + 5y + 9 \cdot (120 - x - y) = 670 \\ 6x + 8y + 14 \cdot (120 - x - y) = 1040 \end{cases}$$

$$\begin{cases} --- \\ 4x + 5y + 1080 - 9x - 9y = 670 \\ 6x + 8y + 1680 - 14x - 14y = 1040 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ -5x - 4y = -410 \\ -8x - 6y = -640 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 5x + 4y = 410 \\ 4x + 3y = 320 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ 4 \cdot \\ 5 \cdot \end{matrix}\begin{cases} --- \\ 5x + 4y = 410 \\ 4x + 3y = 320 \end{cases}$$

$$\begin{cases} --- \\ 20x + 16y = 1640 \quad - \\ 20x + 15y = 1600 \quad = \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ --- \\ y = 40 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \\ 3 \cdot \\ 4 \cdot \end{matrix}\begin{cases} --- \\ 5x + 4y = 410 \\ 4x + 3y = 320 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 15x + 12y = 1230 \quad - \\ 16x + 12y = 1280 \quad = \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ --- \\ x = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \\ z = 120 - 50 - 40 = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \\ z = 30 \end{cases}$$

Le quantità di caffè prodotte ogni giorno dall'azienda sono: $Excelsa = 50kg$, $Robusta = 40$ *e* $Liberica = 30$.

Soluzione B

Se la ditta produce il 50% in meno di caffè $Robusta$, *vuol dire che la quantità di caffè* $Robusta$ *prodotta è di 20 kg* .

Per cui il sistema risolvente il quesito è:

$$\begin{cases} x + 20 + z = 120 \\ 6x + 8 \cdot 20 + 14z = 1040 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 100 - x \\ 6x + 14z = 880 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 100 - x \\ 3x + 7z = 440 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 3x + 7(100 - x) = 440 \end{cases}$$

$$\begin{cases} --- \\ 3x + 700 - 7x = 440 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ -4x = -260 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x = 65 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 65 \\ z = 100 - 65 = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 65 \\ z = 35 \end{cases}$$

Pertanto nel giorno del malfunzionamento della macchina, occorre produrre i seguenti quantitativi di caffè:

$Excelsa = 65kg$, $Robusta = 20$ *e* $Liberica = 35$