Prova di Matematica : Radicali 10.11.2016

(tempi: 1 ora)

Alunno: ____ *Classe: 2C* *L. Scientifico S. Applicate*

1. Dati i seguenti numeri, individua quelli irrazionali: $3{,}464466444666\ldots$; $\frac{4}{15}$; π ; $\sqrt{1{,}21}$; $3{,}67\overline{8}$.
2. Scrivi un numero irrazionale compreso fra $2{,}7$ e $2{,}8$.
3. Scrivi i primi 4 termini delle classi contigue di numeri razionali che hanno come elemento di separazione il numero $\sqrt[2]{11}$.
4. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$2\sqrt{125}-3\sqrt{18}+2\sqrt{12}-3\sqrt{300}+\frac{6}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x-1}}:\sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2-1}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2-1}{x-2}}$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^3+\sqrt{7-\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7+\sqrt{13}}-13\,.$$

5. Semplifica le seguenti espressioni, dopo aver posto le condizioni di esistenza:

$$\sqrt[21]{\frac{x^7y^{14}}{(x-1)^7}} \qquad \sqrt[4]{\frac{x^2}{(x^4-8x^2+16)^4}} \qquad \sqrt[6]{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{4}{x^4}}$$

6. Risolvi la seguente disequazione: $\sqrt{2}\cdot\left(2x+\sqrt{2}\right)>\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{3}x+4$.
7. Nel trapezio rettangolo ABCD l'angolo $\widehat{\mathrm{B}}$ misura 45°, la base maggiore AB misura $8\sqrt{6}$ e la base minore è la metà di AB. Determina il perimetro del trapezio. Calcola l'area del quadrato costruito sul lato obliquo.

Soluzione

1. Dati i seguenti numeri, individua quelli irrazionali: $3{,}464466444666\ldots$; $\frac{4}{15}$; π ; $\sqrt{1{,}21}$; $3{,}67\overline{8}$.

   I numeri irrazionali sono: $3{,}464466444666\ldots$ e π .

2. Scrivi un numero irrazionale compreso fra $2{,}7$ e $2{,}8$.

   $2{,}75010011000111\ldots$

3. Scrivi i primi 4 termini delle classi contigue di numeri razionali che hanno come elemento di separazione il numero $\sqrt[2]{11}$.

   $\sqrt{11} \approx 3{,}316624790355\ldots$.

   $D = \{3\ ,\ \ 3{,}3\ ,\ \ 3{,}31\ ,\ \ 3{,}316\ ,\ \ 3{,}3166\ ,\ \ \ldots..\}$

   $E = \{4\ ,\ \ 3{,}4\ ,\ \ 3{,}32\ ,\ \ 3{,}317\ ,\ \ 3{,}3167\ ,\ \ \ldots.\}$

4. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) =$$
$$= 1+3+2\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2-1 =$$
$$= 5+3\sqrt{3}+\sqrt{6} .$$

$$2\sqrt{125}-3\sqrt{18}+2\sqrt{12}-3\sqrt{300}+\frac{6}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$$
$$= 2\cdot 5\sqrt{5}-3\cdot 3\sqrt{2}+2\cdot 2\sqrt{3}-3\cdot 10\sqrt{3}+\frac{6}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$$
$$= 10\sqrt{5}-9\sqrt{2}+4\sqrt{3}-30\sqrt{3}+\frac{6\sqrt{5}}{5}-\frac{2\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3} =$$
$$= 10\sqrt{5}-9\sqrt{2}-26\sqrt{3}+\frac{6\sqrt{5}}{5}-\frac{2\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2} =$$
$$= 10\sqrt{5}-9\sqrt{2}-26\sqrt{3}+\frac{6\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}-\sqrt{3} =$$
$$= \frac{50\sqrt{5}+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}}{5}-9\sqrt{2}-27\sqrt{3} =$$
$$= \frac{51\sqrt{5}}{5}-9\sqrt{2}-27\sqrt{3} .$$

$$\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x-1}} : \sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2-1}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^2-1}{x-2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}} : \sqrt[3]{\frac{x-2}{(x+1)(x-1)}} \cdot \sqrt[6]{\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}} =$$
$$= \sqrt[6]{\frac{(x-2)^3(x-3)^3}{(x-1)^3}} : \sqrt[6]{\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}} =$$
$$= \sqrt[6]{\frac{(x-2)^3(x-3)^3}{(x-1)^3}\cdot\frac{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}{(x-2)^2}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}} =$$
$$= \sqrt[6]{(x-3)^3\cdot(x+1)^3} =$$
$$= \sqrt{(x-3)\cdot(x+1)} .$$

$(\sqrt{2}+1)^3 + \sqrt{7-\sqrt{13}} \cdot \sqrt{7+\sqrt{13}} - 13 \ =$

$= \ \sqrt{2^3} + 1 + 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{(7-\sqrt{13}) \cdot (7+\sqrt{13})} - 13 \ =$

$= \ 2\sqrt{2} + 7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{49-13} - 13 \ =$

$= \ 5\sqrt{2} + 7 + \sqrt{36} - 13 \ =$

$= \ 5\sqrt{2} + 7 + 6 - 13 \ =$

$= \ 5\sqrt{2}$.

5. Semplifica le seguenti espressioni, dopo aver posto le condizioni di esistenza:

$$\sqrt[21]{\frac{x^7 y^{14}}{(x-1)^7}}$$

Determiniamo le condizioni di esistenza:

$(x-1)^7 \neq 0$; $\quad x - 1 \neq 0$; $\quad x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad C.E.: \ x \neq 1$.

$$\sqrt[21]{\frac{x^7 y^{14}}{(x-1)^7}} = \sqrt[21]{\left(\frac{xy^2}{x-1}\right)^7} = \sqrt[3]{\frac{xy^2}{x-1}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{x^2}{(x^4-8x^2+16)^4}}$$

Determiniamo le condizioni di esistenza:

$\dfrac{x^2}{(x^2-4)^8} \geq 0$; $\quad \begin{matrix} x^2 \geq 0 \\ (x^2-4)^8 > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \forall x \in R \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \forall x \in R \\ x \neq \pm 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad C.E.: \ x \neq \pm 2$.

$$\sqrt[4]{\frac{x^2}{(x^4-8x^2+16)^4}} = \sqrt[4]{\frac{x^2}{[(x^2-4)^2]^4}} = \sqrt[4]{\frac{x^2}{(x^2-4)^8}} = \sqrt{\frac{|x|}{(x^2-4)^4}} \ .$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^4}} = \sqrt[6]{\frac{x^2-4x+4}{x^4}} = \sqrt[6]{\frac{(x-2)^2}{x^4}}$$

Determiniamo le condizioni di esistenza:

$\dfrac{(x-2)^2}{x^4} \geq 0$;

$\begin{matrix} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^4 > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \forall x \in R \\ x \neq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad C.E.: \ x \neq 0$

$$= \sqrt[6]{\frac{(x-2)^2}{x^4}} = \sqrt[6]{\left(\frac{x-2}{x^2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{|x-2|}{x^2}} \ .$$

6. Risolvi la seguente disequazione: $\sqrt{2}\cdot\left(2x+\sqrt{2}\right)>\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{3}x+4$.

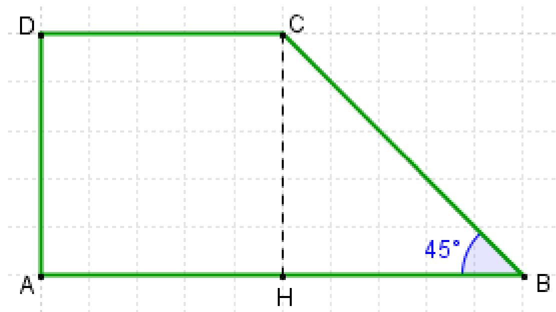
$\sqrt{2}\cdot\left(2x+\sqrt{2}\right)>\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{3}x+4$;

$2\sqrt{2}\,x+2>\sqrt{3}\,x-\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}x+4$;

$2\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,x>4-2$;

$3\sqrt{2}\,x>2$; $\quad x>\dfrac{2}{3\sqrt{2}}$; $\quad x>\dfrac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $\quad x>\dfrac{2\sqrt{2}}{3\cdot 2}$; $\quad x>\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

7. Nel trapezio rettangolo ABCD l'angolo $\widehat{\mathrm{B}}$ misura 45°, la base maggiore AB misura $8\sqrt{6}$ e la base minore è la metà di AB. Determina il perimetro del trapezio. Calcola l'area del quadrato costruito sul lato obliquo.



Soluzione

$\overline{HB}=\overline{AB}-\overline{AH}=8\sqrt{6}-4\sqrt{6}=4\sqrt{6}$.

$\overline{CH}=\overline{HB}=4\sqrt{6}$.

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{HB}^2+\overline{HC}^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{6}\right)^2+\left(4\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{96+96}=\sqrt{192}=\sqrt{2^6\cdot 3}=8\sqrt{3}$.

$p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{DC}+\overline{AD}=8\sqrt{6}+8\sqrt{3}+4\sqrt{6}+4\sqrt{6}=16\sqrt{6}+8\sqrt{3}=8\cdot\left(2\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)$.

$q\,(BC)=\overline{BC}^2=\left(8\sqrt{3}\right)^2=64\cdot 3=192$.