Classe: *2 C Liceo Scientifico S. A.* *30 marzo 2017*

Prova di Matematica: *Equazioni di II grado e T. Pitagora - Euclide*

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$4x + 6\sqrt{3}x^2 = 0$ $\quad$ $6x^2 - 2 = 0$ $\quad$ $6x^2 - x - 2 = 0$

$x \cdot (x^2 - 4) - x^2 = (x-1)^3 + 2(x-2) - 2x$ $\quad$ $\dfrac{2}{2x+3} = \dfrac{x+4}{2x^2+9x+10} - \dfrac{2x-1}{4x^2+16x+15}$

2. Risolvi e discuti la seguente equazione nell'incognita x :

$$1 - \frac{2x - 11k + 2k^2}{2kx + k^2} = \frac{3k - x}{kx}$$

3. In un trapezio isoscele le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui. La base minore è lunga $14\ cm$ e la proiezione del lato obliquo sulla base maggiore è lunga $18\ cm.$ Determina il perimetro e l'area del trapezio.

4. Il lato di un triangolo equilatero ABC misura a. Considera un punto P sul lato AC e traccia dal punto P la parallela al lato AB che interseca BC nel punto Q e traccia la parallela a BC che interseca il lato AB nel punto R. Determina la posizione del punto P in modo che $\overline{QR} = \frac{1}{3}a^2$.

Soluzione

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$$4x + 6\sqrt{3}x^2 = 0\,; \qquad x \cdot \left(4 + 6\sqrt{3}x\right) = 0 \qquad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{4}{6\sqrt{3}} = -\dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\dfrac{2}{9}\sqrt{3} \end{array}$$

$$6x^2 - 2 = 0\,; \qquad 6x^2 = 2\,; \qquad x^2 = \frac{2}{6}\,; \qquad x^2 = \frac{1}{3}\,; \qquad x_{1,2} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$6x^2 - x - 2 = 0 \qquad \Delta = 1 + 48 = 49 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{49}}{12} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1-7}{12} = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1+7}{12} = +\dfrac{2}{3} \end{array}$$

$$x \cdot (x^2 - 4) - x^2 = (x-1)^3 + 2(x-2) - 2x\,;$$

$$x^3 - 4x - x^2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x - 4 - 2x\,;$$

$$2x^2 - 7x + 5 = 0\,;\ ; \qquad \Delta = 49 - 40 = 9 \qquad x_{1,2} = \frac{7 \mp \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{7-3}{4} = +1 \\ x_2 = \dfrac{7+3}{4} = +\dfrac{5}{2} \end{array}$$

$$\frac{2}{2x+3} = \frac{x+4}{2x^2 + 9x + 10} - \frac{2x-1}{4x^2 + 16x + 15}\,; \qquad C.E.:\ x \neq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq -\frac{5}{2}$$

$$\frac{2}{2x+3} = \frac{x+4}{(x+2)(2x+5)} - \frac{2x-1}{(2x+3)(2x+5)} \qquad m.c.m. = (x+2)(2x+5)(2x+3)$$

$$2(x+2)(2x+5) = (2x+3)(x+4) - (x+2)(2x-1)\,;$$

$$2(2x^2 + 5x + 4x + 10) = 2x^2 + 8x + 3x + 12 - 2x^2 + x - 4x + 2\,;$$

$$4x^2 + 10x + 8x + 20 - 2x^2 - 8x - 3x - 12 + 2x^2 - x + 4x - 2 = 0\,;$$

$$4x^2 + 10x + 8x + 20 - 8x - 3x - 12 - x + 4x - 2 = 0\,;$$

$$4x^2 + 10x + 6 = 0\,;$$

$$2x^2 + 5x + 3 = 0\,;$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1 \qquad x_{1,2} = \frac{-5 \mp \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-5-1}{4} = -\dfrac{3}{2} \quad non\ \ accettabile \\ x_2 = \dfrac{-5+1}{4} = -\dfrac{4}{4} = -1 \ \ accettabile \end{array}$$

2. Risolvi e discuti la seguente equazione nell'incognita x :

$$1-\frac{2x-11k+2k^2}{2kx+k^2}=\frac{3k-x}{kx}\,; \qquad C.E.:\ k\neq 0 \qquad C.A.:\ x\neq 0\ \wedge\ x\neq -\frac{k}{2}$$

$$1-\frac{2x-11k+2k^2}{k(2x+k)}=\frac{3k-x}{kx}\,; \qquad m.c.m.=\ kx\cdot(2x+k)$$

$kx\cdot(2x+k)-2x^2+11kx-2k^2x=(2x+k)\cdot(3k-x)\,;$

$2kx^2+k^2x-2x^2+11kx-2k^2x=6kx-2x^2+3k^2-kx\,;$

$2kx^2+k^2x-2x^2+11kx-2k^2x-6kx+2x^2-3k^2+kx=0\,;$

$2kx^2-k^2x+6kx-3k^2=0\,;$

$2kx^2+(6-k)kx-3k^2=0\,;$

Dividiamo tutti i termini per $k\neq 0$ $(C.E.)$

$2x^2+(6-k)x-3k=0\,;$

$\Delta=(6-k)^2-4\cdot 2\cdot(-3k)=36+k^2-12k+24k=36+k^2-12k=(6+k)^2$

$$Se\ \ \Delta=0 \quad cioè\ se \quad k=-6 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-(6-k)\mp\sqrt{0}}{2\cdot 2}=\frac{k-6}{4}$$

$$sostituendo \quad k=-6 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-6-6}{4}=-3$$

$$Se\ \ \Delta>0\ \ cioè\ se\ k\neq -6 \ \ \Rightarrow \ \ x_{1,2}=\frac{-(6-k)\mp\sqrt{(6+k)^2}}{2\cdot 2}= \begin{cases} x_1=\dfrac{-6+k-(6+k)}{4}=\dfrac{-12}{4}=-3 \\[2ex] x_2=\dfrac{-6+k+(6+k)}{4}=\dfrac{2k}{4}=\dfrac{k}{2}\end{cases}$$

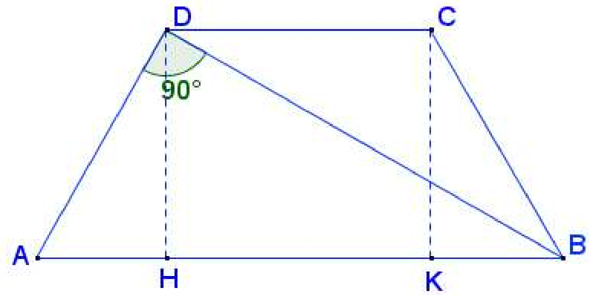
Verifichiamo l'accettabilità delle soluzioni:

ACCETTABILITÀ DELLE SOLUZIONI	
1ª Condizione: $x\neq 0$	*2ª Condizione:* $x\neq -\frac{k}{2}$
$\frac{k}{2}\neq 0\,;\quad k\neq 0$	$\frac{k}{2}\neq -\frac{k}{2}\,;\quad k\neq -k\,;\quad 2k\neq 0\,;\quad k\neq 0$
$-3\neq 0\,;\quad \forall k\in R$	$-3\neq -\frac{k}{2}\,;\quad 6\neq k\,;\quad k\neq 6\,.$

Conclusioni :

PARAMETRO	TIPO	EQUAZIONE
$k=0$	Perde significato	$-$
$k\neq 0\ \wedge\ k\neq\mp 6$	Equazione completa con $\Delta>0$	$x_1=-3\ \wedge\ x_2=\frac{k}{2}$
$k=-6$	Equazione completa con $\Delta=0$	$x_{1,2}=-3$
$\nexists k\in R$	Equazione completa con $\Delta<0$	$-$
$\nexists k\in R$	Equazione di I grado	$-$

3. In un trapezio isoscele le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui. La base minore è lunga 14 cm e la proiezione del lato obliquo sulla base maggiore è lunga 18 cm. Determina il perimetro e l'area del trapezio.



Soluzione

$\overline{AH} = \overline{KB} = 18\ cm$

$\overline{DC} = \overline{HK} = 14\ cm$

$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{K\ \ } = (18 + 14 + 18)\ cm = 50\ cm$

$\overline{HB} = \overline{HK} + \overline{KB} = (14 + 18)\ cm = 32\ cm$

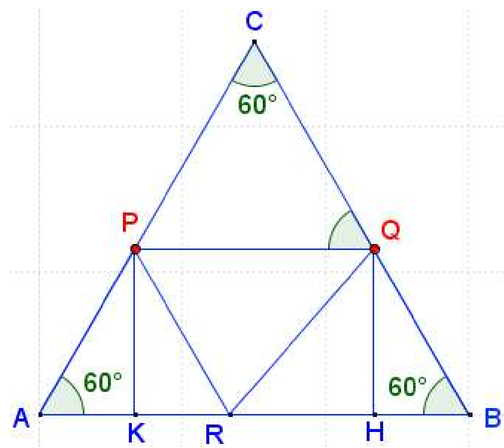
$\overline{AD}^{\,2} = \overline{A\ \ } \cdot \overline{AB}\ ; \qquad \overline{AD} = \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{AB}} = \sqrt{18 \cdot 50}\ cm = \sqrt{900}\ cm \quad 30\ cm\ .$

$\overline{DH}^{\,2} = \overline{AH} \cdot \overline{HB}\ ; \qquad \overline{DH} = \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{HB}} = \sqrt{18 \cdot 32}\ cm = \sqrt{576}\ cm = 24\ cm\ .$

$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = (50 + 30 + 14 + 30)\ cm = 124\ cm\ .$

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DH} = \frac{50 + 14}{2} \cdot 24\ cm^2 = 768\ cm^2\ .$$

4. Il lato di un triangolo equilatero ABC misura a. Considera un punto P sul lato AC e traccia dal punto P la parallela al lato AB che interseca BC nel punto Q e traccia la parallela a BC che interseca il lato AB nel punto R. Determina la posizione del punto P in modo che $\overline{QR} = \frac{1}{3}a^2$.



Soluzione

$\overline{AP} = \overline{QB} = x \qquad con \qquad 0 < x < a$

$$\overline{QH} = \overline{P\ \ } = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\overline{AK} = \overline{HB} = \overline{KR} = \frac{x}{2}$$

$\overline{PC} = \overline{PQ} = \overline{KH} = a - x$

$$\overline{RH} = \overline{KH} - \overline{KR} \;=\; (a - x) - \frac{x}{2} \;=\; a - \frac{3}{2}x\ .$$

$$\overline{QR}^{\,2} = \overline{RH}^{\,2} + \overline{QH}^{\,2} = \left(a - \frac{3}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = a^2 + \frac{9}{4}x^2 - 3ax + \frac{3}{4}x^2 =$$

$$= a^2 + \frac{9}{4}x^2 - 3ax + \frac{3}{4}x^2 \;=\; 3x^2 - 3ax + a^2\ .$$

Sostituendo nella relazione si ottiene :

$$\overline{QR} = \frac{1}{3}a^2\ ; \qquad 3x^2 - 3ax + a^2 = \frac{1}{3}a^2\ ; \qquad 3x^2 - 3ax + \frac{2}{3}a^2 = 0\ ; \qquad 9x^2 - 9ax + 2a^2 = 0\ ;$$

$$\Delta = (-9a)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2a^2 = 81a^2 - 72a^2 = 9a^2 \qquad x_{1,2} = \frac{9a \mp \sqrt{9a^2}}{2 \cdot 9} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{9a - 3a}{18} = \dfrac{1}{3}a \\[2ex] x_2 = \dfrac{9a + 3a}{18} = \dfrac{2}{3}a \end{cases}$$

Le soluzioni sono entrambe accettabili.