

Esercizio 121.323

Essendo $\overline{AB} = x$ la misura di un segmento $\Rightarrow x > 0$.

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CDE .

$$\overline{DH} = \sqrt{\left(\frac{5}{8}x\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{64}x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{9}{64}x^2} = \frac{3}{8}x.$$

$$\begin{aligned} \overline{BC} = \overline{AE} &= \frac{1}{2} \cdot \left(324 - \frac{5}{8}x - \frac{5}{8}x - x\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2592 - 5x - 5x - 8x}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2592 - 18x}{8}\right) = \\ &= \frac{2592 - 18x}{16} = 162 - \frac{9}{8}x. \end{aligned}$$

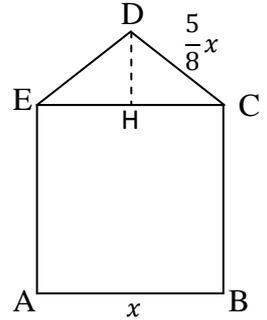
Essendo $\overline{BC} = x$ la misura di un segmento $\Rightarrow 162 - \frac{9}{8}x > 0$;

$$1296 - 9x > 0; \quad -9x > -1296; \quad 9x < 1296; \quad x < \frac{1296}{9}; \quad x < 144.$$

La misura dell'area in funzione della base x è:

$$S(x) = x \cdot \left(162 - \frac{9}{8}x\right) + \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{8}x = 162x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^2 = 162x - \frac{15}{16}x^2;$$

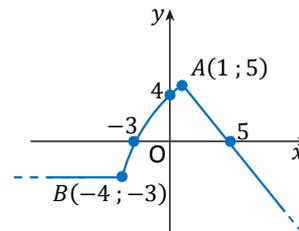
$$S(x) = 162x - \frac{15}{16}x^2 \quad \text{il cui dominio è } D: 0 < x < 144.$$



Esercizio 138.A

1. Della funzione $f(x)$ rappresentata a lato, determina:

- il dominio
- il codominio
- $f(-4)$
- $f(\quad) = 5$
- $f(0)$
- gli intervalli in cui $f(x)$ è crescente
- gli intervalli in cui $f(x) > 0$



Soluzione

- Il Dominio $D: \mathbb{R}$
- Il Codominio $C: y \leq 5$
- $f(-4) = -3$
- $f(1) = 5$
- $f(0) = 4$
- $f(x)$ è crescente nell'intervallo $] -4, 1[$
- $f(x) > 0$ nell'intervallo $] -3, 5[$

2. Determina il dominio delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{2}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$$y = \frac{x}{|x| - 4}$$

$$y = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}$$

Soluzione

Il dominio della funzione $y = \frac{2}{x^3 - 6x^2 + 9x}$ è $D: x \neq 0 \wedge x \neq 3$.

Infatti:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0; \quad x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0; \quad x \cdot (x - 3)^2 = 0; \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = 3 \end{matrix} \text{ Soluzione doppia}$$

Il dominio della funzione $y = \frac{x}{|x| - 4}$ è $D: x \neq \pm 4$.

Infatti:

$$|x| - 4 = 0; \quad |x| = 4; \quad x = \pm 4.$$

Il dominio della funzione $y = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}$ è $D: -5 \leq x \leq 5 \wedge x \neq 0$.

Infatti:

$$\begin{cases} 25 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

3. Data la funzione $f(x) = \frac{x^2+6x}{1-x}$, classificala, determina il suo dominio e i punti di intersezione del grafico con gli assi, studia il segno e rappresenta nel piano cartesiano le regioni in cui si trova il suo grafico.

Soluzione

La funzione $f(x) = \frac{x^2+6x}{1-x}$ è una funzione razionale fratta.

Il dominio è $D: x \neq 1$.

Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + 6x}{1 - x} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

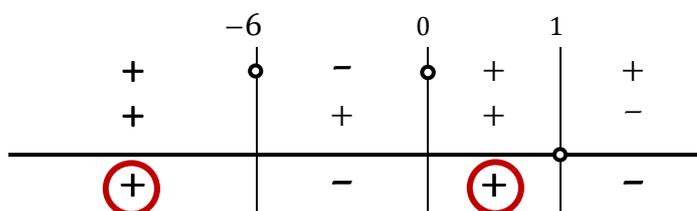
$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + 6x}{1 - x} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2 + 6x}{1 - x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 6x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot (x + 6) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -6 \\ y = 0 \end{cases}$$

Segno della funzione:

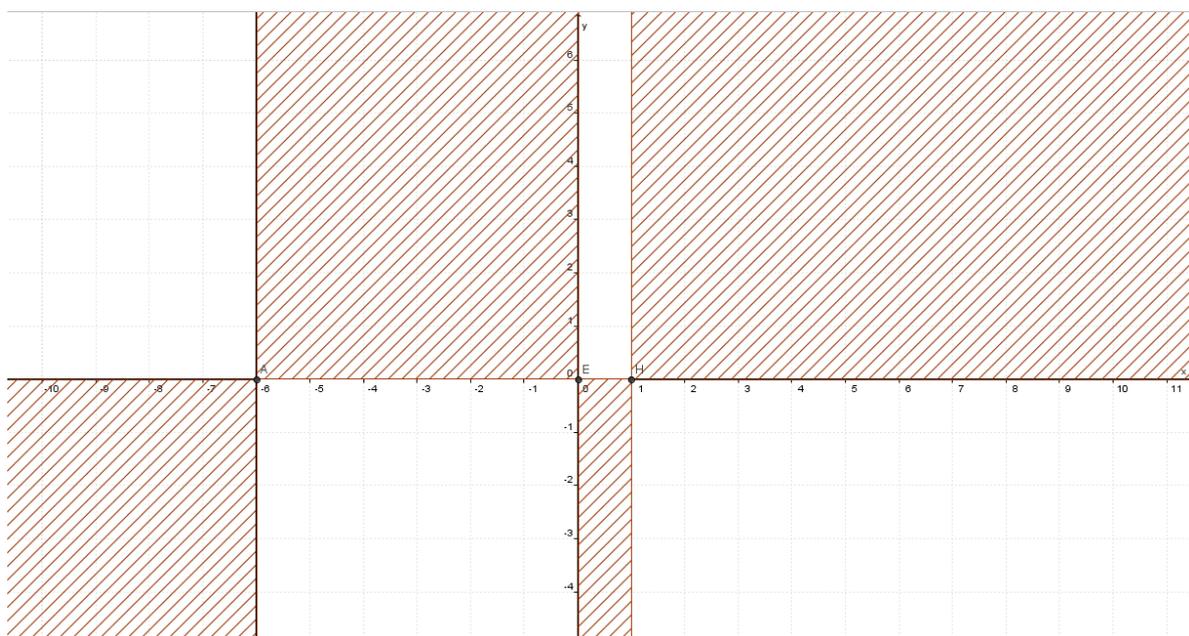
$$f(x) > 0 : \frac{x^2 + 6x}{1 - x} > 0;$$

$$\begin{matrix} x^2 + 6x > 0 & x < -6 \vee x > 0 \\ 1 - x > 0 & x < 1 \end{matrix}$$

$$\left| \begin{matrix} x^2 + 6x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{matrix} \right| \quad \begin{matrix} x < -6 \vee x > 0 \\ x < 1 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} f(x) > 0 : & x < -6 \vee 0 < x < 1 \\ f(x) < 0 : & -6 < x < 0 \vee x > 1 \end{matrix}$$



4. Considera le funzioni $f(x) = 3x$ e $g(x) = \frac{x}{2} - 5$ e scrivi l'espressione analitica di f^{-1} , g^{-1} , $f \circ g$ e $(f \circ g)^{-1}$.

Soluzione

Per trovare l'inversa di $y = f(x)$, ricaviamo x in funzione di y : $x = \frac{1}{3}y$

L'inversa di $y = f(x)$ è $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y$.

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$.

Per trovare l'inversa di $y = g(x)$, ricaviamo x in funzione di y :

$$y = \frac{x}{2} - 5; \quad 2y = x - 10; \quad x = 2y + 10.$$

L'inversa di $y = g(x)$ è $x = g^{-1}(y) = 2y + 10$.

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene $f^{-1}(x) = 2x + 10$.

$$f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2} - 5\right) = 3\left(\frac{x}{2} - 5\right) = \frac{3}{2}x - 15.$$

Per trovare l'inversa di $f \circ g$ ricaviamo x in funzione di y :

$$y = \frac{3}{2}x - 15; \quad 2y = 3x - 30; \quad 3x = 2y + 30; \quad x = \frac{2}{3}y + 10.$$

L'inversa di $f \circ g$ è $x = g^{-1}(y) = \frac{2}{3}y + 10$.

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + 10.$$

5. Data la funzione $f(x) = 2x^3 - 1$:

- trova la funzione inversa f^{-1}
- dimostra che f e f^{-1} sono funzioni crescenti.

Soluzione a

La funzione $f(x) = 2x^3 - 1$ è una funzione razionale intera.

Il cui dominio è $D: \mathbb{R}$.

$f(x)$ è invertibile se è biunivoca (iniettiva e suriettiva).

$f(x)$ iniettiva .

Infatti, se $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$:

$$2x_1^3 - 1 = 2x_2^3 - 1; \quad \rightarrow \quad 2x_1^3 = 2x_2^3; \quad x_1^3 = x_2^3; \quad x_1 = x_2 .$$

$f(x)$ suriettiva .

Infatti ricavando x in funzione di y si ha:

$$y = 2x^3 - 1; \quad 2x^3 = y + 1; \quad x^3 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}; \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$$

Tale espressione ha significato $\forall y \in \mathbb{R}$.

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene l'espressione: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$.

Soluzione b

$f(x)$ è una funzione crescente, se $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$:

Infatti, se $x_1 < x_2$; $x_1^3 < x_2^3$; $2x_1^3 < 2x_2^3$; $2x_1^3 - 1 < 2x_2^3 - 1$; $f(x_1) < f(x_2)$.

$f^{-1}(x)$ è una funzione crescente, se $x_1 < x_2 \rightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$:

Infatti, se $x_1 < x_2$; $\frac{1}{2}x_1 < \frac{1}{2}x_2$; $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}}$; $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$.

6. Data la funzione $y = f(x)$ di equazione $y = 2x - 1$, scrivi l'equazione della funzione $y = f'(x)$ ottenuta traslando la funzione $y = f(x)$ secondo il vettore $\vec{v}(-1; 0)$ e disegna i grafici delle funzioni.

Soluzione a

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y \end{cases}$

Le equazioni inverse sono: $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' \end{cases}$

Da cui si ottiene l'equazione della funzione $y = f'(x)$:

$$y' = 2(x' + 1) - 1; \quad y' = 2x' + 2 - 1; \quad y' = 2x' + 1$$

Indicando con x la variabile indipendente si ottiene $y = 2x + 1$.

I grafici delle due funzioni sono sotto riportati.

