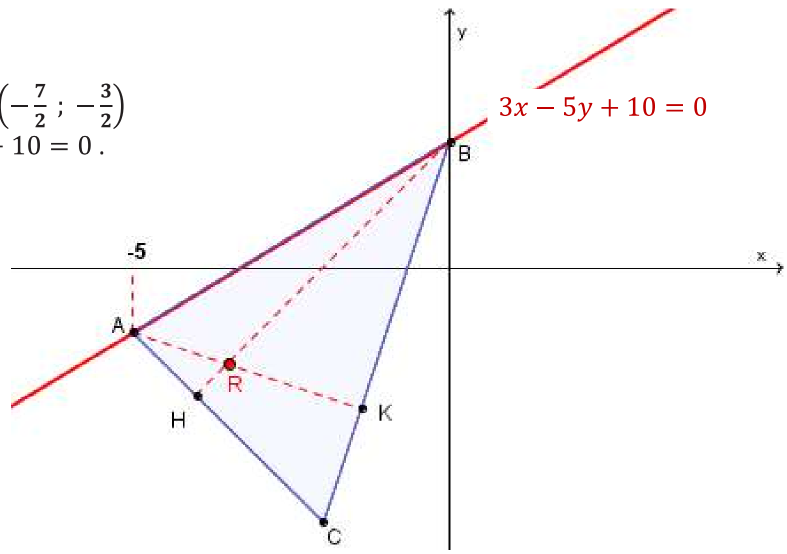
1. Data la successione: 3, 7, 11, 15, 19, …
   a. stabilisci se è una progressione
   b. determina la sua espressione per ricorsione
   c. determina la sua espressione analitica
   d. calcola il 99-esimo termine.

2. Il perimetro del triangolo ABC è lungo 37 cm e le misure dei lati sono in progressione geometrica. Sapendo che la differenza fra il lato maggiore e il minore è 7 cm, determina le lunghezze dei lati.

3. Calcola la seguente somma:
   $$3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\ . \ . \ . \ +\ \frac{3}{2^6}$$

4. Rappresenta il grafico della seguente funzione:
   $$y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}+|x-3|$$

5. Il triangolo ABC della figura ha l'ortocentro in $R\left(-\frac{7}{2}\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$ ed equazione della retta AB uguale a $3x-5y+10=0$.
   Determina:
   a. le coordinate dei tre vertici A , B e C
   b. l'area del triangolo ABC.



Soluzione

1. Data la successione: 3, 7, 11, 15, 19, … ,:
   a. stabilisci se è una progressione
   b. determina la sua espressione per ricorsione
   c. determina la sua espressione analitica a_n
   d. calcola il 99-esimo termine.

<u>Soluzione</u>

La differenza tra ogni termine e il suo precedente è sempre uguale a 4.
Pertanto si tratta di una progressione aritmetica crescente di ragione 4.

La rappresentazione per ricorsione è $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4 & se\ n > 1 \end{cases}$

La rappresentazione analitica è del tipo $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ *cioè* $a_n = 3 + 4(n-1) \qquad \forall n \geq 1$

Il 99-esimo termine è $a_{99} = a_1 + (99-1) \cdot d = 3 + 98 \cdot 4 = 395$.

2. Il perimetro del triangolo ABC è lungo 37 cm e le misure dei lati sono in progressione geometrica. Sapendo che la differenza fra il lato maggiore e il minore è 7 cm, determina le lunghezze dei lati.

<u>Soluzione</u>

Indichiamo con a_1, a_2, a_3 *le misure dei tre lati del triangolo, con* $0 < a_1 < a_2 < a_3$.
Trattandosi di una progressione geometrica si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 37 \\ a_3 - a_1 = 7 \\ a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_1 \cdot q^2 \end{cases}$$

Sostituendo le ultime due espressioni nelle prime 2 equazioni si ottiene un sistema di 2 equazioni in 2 incognite:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 37 \\ a_1 \cdot q^2 - a_1 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 37 \\ a_1 \cdot (q^2 - 1) = 7 \end{cases}$$

Ricaviamo a_1 *dalla seconda equazione* $(con\ q^2 - 1 \neq 0)$ *e sostituiamo l'espressione trovata nella prima equazione:*

$$\begin{cases} --- \\ a_1 = \dfrac{7}{q^2-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{7}{q^2-1} \cdot (1 + q + q^2) = 37 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 7 \cdot (1 + q + q^2) = 37 \cdot (q^2 - 1) \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 + 7q + 7q^2 = 37q^2 - 37 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 30q^2 - 7q - 44 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{1,2} = \dfrac{7 \mp \sqrt{49 + 5280}}{60} = \dfrac{7 \mp \sqrt{5329}}{60} = \dfrac{7 \mp 73}{60} = \begin{matrix} q_1 = \dfrac{7-73}{60} = -\dfrac{66}{60} = -\dfrac{11}{10} \\ q_2 = \dfrac{7+73}{60} = +\dfrac{80}{60} = +\dfrac{4}{3} \end{matrix} \\ --- \end{cases}$$

La soluzione $q_1 = -\frac{16}{15}$ *non è accettabile, perché in questo caso i termini (misure dei lati) sarebbero negativi.*

La soluzione $q_2 = +\frac{4}{3}$ *è accettabile.*

Continuando a risolvere il sistema si ha:

$$\begin{cases} q = \dfrac{4}{3} \\ a_1 = \dfrac{7}{q^2-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ a_1 = \dfrac{7}{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1} = \dfrac{7}{\frac{16}{9} - 1} = \dfrac{7}{\frac{7}{9}} = 7 \cdot \dfrac{9}{7} = 9\,. \end{cases}$$

In seguito si determinano:

$$a_2 = a_1 \cdot q = 9 \cdot \frac{4}{3} = 12 \qquad e \qquad a_3 = a_1 \cdot q^2 = 9 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 9 \cdot \frac{16}{9} = 16\,.$$

In definitiva le misure dei tre lati sono: $a_1 = 9\ cm \qquad a_2 = 12\ cm \qquad a_3 = 16\ cm$.

3. Calcola la seguente somma:

$$3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\ .\ .\ .+\ \frac{3}{2^6}$$

<u>*Soluzione*</u>

$$3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\ .\ .\ .+\ \frac{3}{2^6} \qquad (7\ termini)$$

È una progressione geometrica decrescente con $a_1 = 3$ *e ragione* $q = \frac{1}{2}$.

$$S_7 = 3\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7-1}{\frac{1}{2}-1} = 3\cdot\frac{\frac{1}{2^7}-1}{\frac{1-2}{2}} = 3\cdot\frac{1-2^7}{2^7}\cdot\frac{2}{1-2} = 3\cdot\frac{1-2^7}{2^6\cdot(1-2)} = 3\cdot\frac{2^7-1}{2^6} = \frac{381}{64}.$$

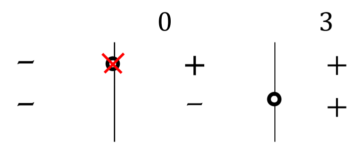
4. Rappresenta il grafico della seguente funzione:

$$y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}+|x-3| = \frac{|x|}{x}+|x-3|$$

Il dominio della funzione è $D = \{x \in R\ \ /\ \ x \neq 0\}$

Studiamo i segni di:

$$x > 0 \qquad\qquad x > 0$$
$$x-3 > 0 \qquad\qquad x > 3$$



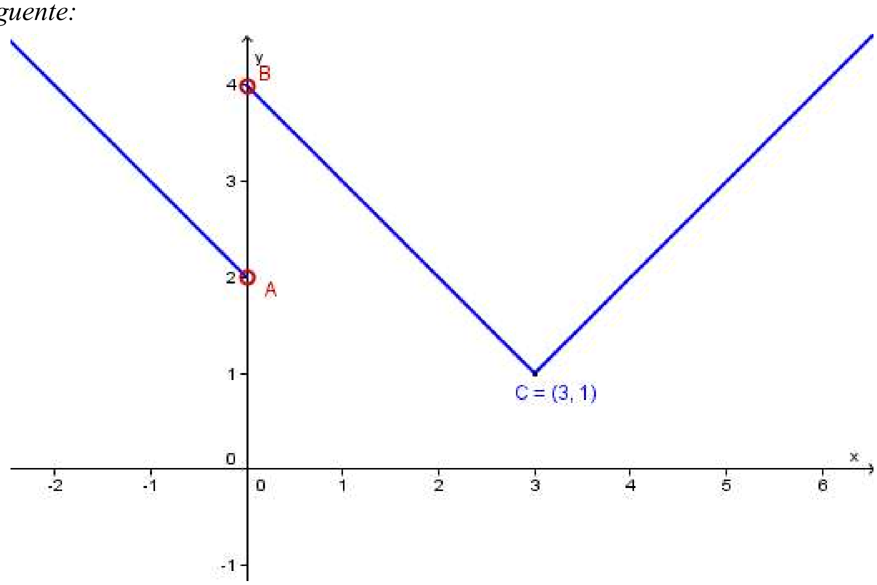
La funzione è una funzione definita a tratti:

$$y = \frac{|x|}{x}+|x-3| = \begin{cases} \frac{-x}{x}-(x-3) & se\ \ x<0 \\ \frac{+x}{x}-(x-3) & se\ \ 0<x\leq 3 \\ \frac{x}{x}+(x-3) & se\ \ x>3 \end{cases}$$

Semplificando si ottiene:

$$y = \begin{cases} -x+2 & se\ \ x<0 \\ -x+4 & se\ \ 0<x\leq 3 \\ x-2 & se\ \ x>3 \end{cases}$$

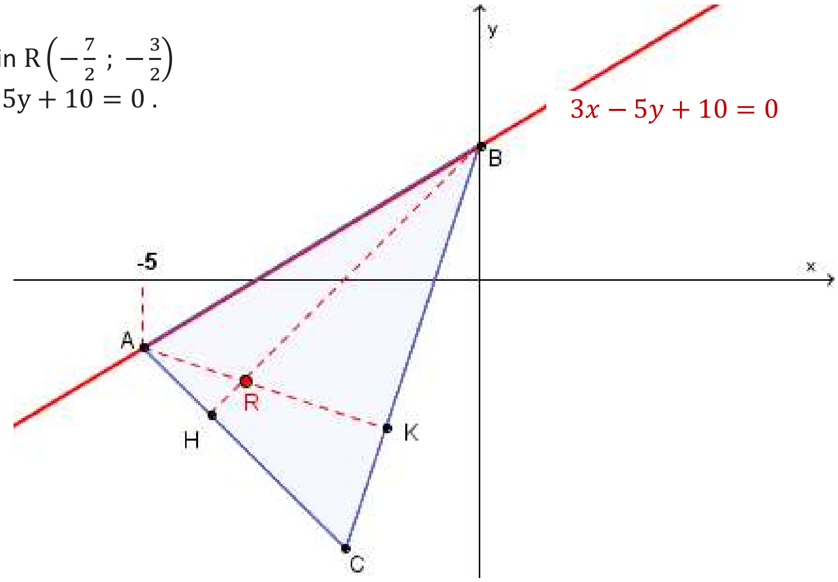
Il cui grafico è il seguente:



5. Il triangolo ABC della figura ha l'ortocentro in R$\left(-\frac{7}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\right)$ ed equazione della retta AB uguale a $3x - 5y + 10 = 0$.

Determina:

c. le coordinate dei tre vertici A , B e C
d. l'area del triangolo ABC.



<u>*Soluzione*</u>

Troviamo l'ordinata del punto A:

$3 \cdot (-5) - 5y_A + 10 = 0$;

$-15 - 5y_A + 10 = 0$;

$5y_A = -5$;

$y_A = -1$; $\Rightarrow$ $A(-5;-1)$

Troviamo l'ordinata del punto B:

$3 \cdot 0 - 5y_B + 10 = 0$; $5y_B = 10$;

$y_B = 2$; $\Rightarrow$ $B(0;2)$

Troviamo il coefficiente angolare dell'altezza AK :

$$m_{AK} = \frac{y_A - y_R}{x_A - x_R} = \frac{-1-\left(-\frac{3}{2}\right)}{-5-\left(-\frac{7}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad m_{BC} = 3$$

Troviamo l'equazione del lato BC :

$y - y_B = m_{BC} \cdot (x - x_B)$; $y - 2 = 3 \cdot (x - 0)$; $y = 3x + 2$

Troviamo il coefficiente angolare dell'altezza BH :

$$m_{BH} = \frac{y_B - y_R}{x_B - x_R} = \frac{2-\left(-\frac{3}{2}\right)}{0-\left(-\frac{7}{2}\right)} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad m_{AC} = -1$$

Troviamo l'equazione del lato AC :

$y - y_A = m_{AC} \cdot (x - x_A)$; $y + 1 = -1 \cdot (x + 5)$; $y = -x - 6$

Troviamo le coordinate del punto C:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 3x + 2 = -x - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 4x = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \cdot (-2) + 2 = -4 \\ x = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $C\,(-2;-4)$

Per il calcolo dell'area del triangolo ABC, consideriamo la base BC e l'altezza ad essa relativa AK.

Per determinare la misura dell'altezza AK occorre conoscere le coordinate del punto K (punto di intersezione fra la retta BC e la retta AK).

Determiniamo quindi l'equazione della retta AK:

$$y - y_A = m_{AK}(x - x_A)\ ; \qquad y + 1 = -\frac{1}{3}(x + 5)\ ; \qquad y + 1 = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}\ ; \qquad y = -\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

Determiniamo le coordinate del punto K :

$$\begin{cases} AK \\ BC \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \\ y = 3x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2 = -\frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} 9x + 6 = -x - 8 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} 10x = -14 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{5} \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ y = 3 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) + 2 = -\frac{21}{5} + 2 = -\frac{11}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K\left(-\frac{7}{5}\,;\,-\frac{11}{5}\right).$$

Possiamo quindi calcolare la misura dell'altezza AK :

$$\overline{AK} \;=\; \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} \;=\; \sqrt{\left(-5+\frac{7}{5}\right)^2 + \left(-1+\frac{11}{5}\right)^2} \;=\; \sqrt{\left(-\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} \;=$$

$$=\; \sqrt{\frac{324}{25}+\frac{36}{25}} \;=\; \sqrt{\frac{360}{25}} \;=\; \frac{6\sqrt{10}}{5} \;.$$

La misura della base BC è :

$$\overline{BC} \;=\; \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \;=\; \sqrt{(0+2)^2 + (2+4)^2} \;=\; \sqrt{4+36} \;=\; \sqrt{40} \;=\; 2\sqrt{10} \;.$$

Calcoliamo infine l'area del triangolo ABC :

$$S_{ABC} \;=\; \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AK} \;=\; \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{6\sqrt{10}}{5} \;=\; 12 \;.$$