Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2016-2017

Classe: *3 A Liceo Scientifico*

22 febbraio 2017
Tempi: 60 minuti

Prova di Matematica: *Retta e Parabola*

Lo studente risolva due dei tre quesiti.

Quesito 1
Trova l'equazione della parabola γ_1 passante per il punto $A\,(-1\,;0)$, avente per asse di simmetria la retta $x=1$ e tangente alla retta di equazione $2x-y-6=0$. Indica con V il vertice e con B l'ulteriore punto di intersezione di γ_1 con l'asse delle x. Trova sull'arco VB un punto P tale che l'area del triangolo PAB sia $\frac{7}{4}$.
Determina l'equazione della parabola γ_2 con vertice $V\,(2\,;1)$ e fuoco $F\,\left(2\,;\frac{3}{4}\right)$.
Determina la retta parallela all'asse delle x che stacca sulle parabole due corde uguali.

Quesito 2
Considera il fascio di parabole di equazione $y-x+2-kx^2+2kx+3k=0$.

a. studia le caratteristiche del fascio;
b. determina l'equazione della retta r contenuta nel fascio;
c. determina la parabola γ del fascio avente come asse di simmetria la retta di equazione $x=\frac{3}{4}$.
d. determina l'area del segmento parabolico limitato dalla parabola γ e dalla retta r .

Quesito 3
Traccia il grafico della funzione: $y=2+\sqrt{|x-2|-3}$

Soluzione

Quesito 1

Trova l'equazione della parabola γ_1 passante per il punto $A\,(-1\,;0)$, avente per asse di simmetria la retta $x = 1$ e tangente alla retta di equazione $2x - y - 6 = 0$. Indica con V il vertice e con B l'ulteriore punto di intersezione di γ_1 con l'asse delle x. Trova sull'arco VB un punto P tale che l'area del triangolo PAB sia $\frac{7}{4}$.

Determina l'equazione della parabola γ_2 con vertice $V\,(2\,;1)$ e fuoco $F\,\left(2\,;\frac{3}{4}\right)$.

Determina la retta parallela all'asse delle x che stacca sulle parabole due corde uguali.

<u>Soluzione</u>

L'equazione della parabola γ_1 è del tipo: $y = ax^2 + bx + c$.

Il passaggio per il punto A e la conoscenza dell'asse di simmetria forniscono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 0 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot 1(-1) + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - b + c = 0 \\ b = -2a \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2a + c = 0 \\ b = -2a \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a + c = 0 \\ b = -2a \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -3a \\ b = -2a \end{cases}$$

L'equazione è quindi appartenente al fascio di parabole di equazione: $y = ax^2 - 2ax - 3a$

Utilizziamo adesso, la condizione di tangenza alla retta di equazione $2x - y - 6 = 0$.

$$\begin{cases} y = ax^2 - 2ax - 3a \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = ax^2 - 2ax - 3a \\ y = 2x - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 6 = ax^2 - 2ax - 3a \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 - 2ax - 2x + 6 - 3a = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 - 2(a+1)x + 6 - 3a = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\Delta = 0\,; \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 0\,; \qquad [-(a+1)]^2 - a\cdot(6 - 3a) = 0\,; \qquad a^2 + 1 + 2a - 6a + 3a^2 = 0\,;$$

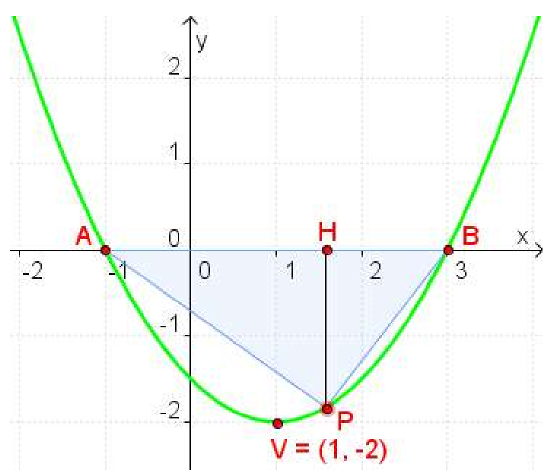
$$4a^2 - 4a + 1 = 0\,; \qquad (2a-1)^2 = 0\,; \qquad 2a - 1 = 0\,; \qquad a = \frac{1}{2}.$$

Pertanto l'equazione della parabola γ_1 è : $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

Determiniamo le coordinate dell'ulteriore punto di intersezione di γ_1 con l'asse delle x.

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1+3} = 1 \mp 2 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{matrix} A\,(-1\,;0) \\ B\,(3\,;0) \end{matrix}$$



Il vertice della parabola γ_1 ha coordinate:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1$$

$$y_V = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{1 - 2 - 3}{2} = -2 \qquad \Rightarrow \quad V\,(1\,;\,-2)$$

Il punto P ha coordinate: $P\,\left(x\;;\;\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)$ *con* $1 \le x \le 3$

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = |3 - (-1)| = 4$$

$$\overline{PH} = |y_H - y_P| = \left|0 - \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)\right| = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

L'area del triangolo ABP è :

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PH} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}\right) = -x^2 + 2x + 3\ .$$

Imponiamo che tale area sia uguale a $\frac{7}{4}$.

$-x^2+2x+3 = \dfrac{7}{4}$; $\qquad -x^2+2x-\dfrac{5}{4}=0$; $\qquad 4x^2-8x-5=0$.

$$x_{R,P} = \frac{4\pm\sqrt{16+20}}{4} = \frac{4\pm 6}{4} = \quad \begin{array}{ll} x_R = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} & \textit{non accettabile} \\ x_P = \dfrac{10}{4} = +\dfrac{5}{2} \quad \in [1\,,3] & \textit{Accettabile} \end{array}$$

$$y_P = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4} - \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{25}{8} - \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{25-20-12}{8} = -\frac{7}{8}.$$

Pertanto il punto P ha coordinate : $P\left(\frac{5}{2}\,;\,-\frac{7}{8}\right)$.

L'equazione della parabola γ_2 *con vertice* $V\,(2\,;1)$ *e fuoco* $F\,\left(2\,;\frac{3}{4}\right)$ *si ottiene imponendo:*

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 1 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -4a \\ \Delta = -4a \\ 1-\Delta = 3a \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ \\ 1-\Delta+\Delta = 3a+(-4a) \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ \\ 1 = -a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 4 \\ \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4 \\ \Delta = -4a \\ a = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ b^2-4ac = -4a \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ 4^2-4\cdot(-1)\cdot c = -4\cdot(-1) \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ 16+4c = 4 \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 4 \\ c = -3 \\ a = -1 \end{cases}$$

L'equazione della parabola γ_2 *è :* $y = -x^2+4x-3$.

La retta parallela all'asse delle x *ha equazione* $y = q$.
Determiniamo le intersezioni di tale retta con le due parabole.

$$\begin{cases} y = -x^2+4x-3 \\ y = q \end{cases} \qquad \begin{cases} q = -x^2+4x-3 \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4x+3+q = 0 \\ - - - \end{cases}$$

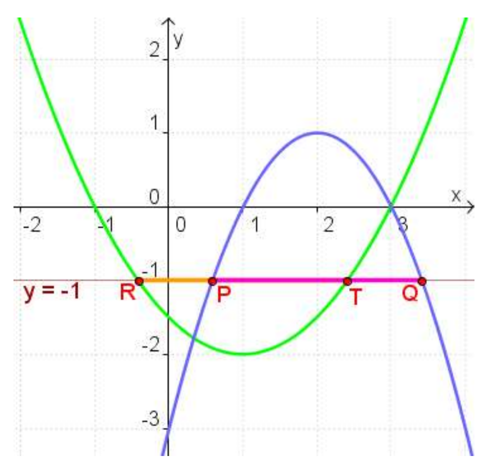
$$\begin{cases} x_{1,2} = 2\mp\sqrt{4-(3+q)} = 2\mp\sqrt{1-q} \\ - - - \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} P\,\left(2-\sqrt{1-q}\,;\; q\right) \\ Q\,\left(2+\sqrt{1-q}\,;\; q\right) \end{array} \quad \textit{con } q \le 1 .$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ y = q \end{cases} \qquad \begin{cases} q = \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} - q = 0 \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2x-3-2q = 0 \\ - - - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = 1\mp\sqrt{1+(3+2q)} = 1\mp\sqrt{4+2q} \\ - - - \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} R\,\left(1-\sqrt{4+2q}\,;\; q\right) \\ T\,\left(1+\sqrt{4+2q}\,;\; q\right) \end{array} \quad \textit{con } q \ge -2 .$$

Determiniamo le misure delle corde:

$\overline{PQ} = |x_Q - x_P| = \left|2+\sqrt{1-q} - \left(2-\sqrt{1-q}\right)\right| =$
$= \left|2\sqrt{1-q}\right| = 2\sqrt{1-q}$.
$\overline{RT} = |x_R - x_T| = \left|1+\sqrt{4+2q} - \left(1-\sqrt{4+2q}\right)\right| =$
$= \left|\,2\sqrt{4+2q}\,\right| = 2\sqrt{4+2q}$.



Imponiamo che : $\overline{PQ} = \overline{RT}$.

$2\sqrt{1-q} = 2\sqrt{4+2q}$;

$$\begin{cases} 1-q \ge 0 \\ 4+2q \ge 0 \\ 1-q = 4+2q \end{cases} \qquad \begin{cases} q \le 1 \\ q \ge -2 \\ 3q = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 \le q \le 1 \\ \\ q = -1 \end{cases} \qquad \textit{Accettabile}$$

La retta richiesta ha quindi equazione: $y = -1$.

Quesito 2

Considera il fascio di parabole di equazione $y - x + 2 - kx^2 + 2kx + 3k = 0$.

a. studia le caratteristiche del fascio;
b. determina l'equazione della retta r contenuta nel fascio;
c. determina la parabola γ del fascio avente come asse di simmetria la retta di equazione $x = \frac{3}{4}$.
d. determina l'area del segmento parabolico limitato dalla parabola γ e dalla retta r .

<u>*Soluzione a*</u>

Scriviamo l'equazione del fascio come combinazione lineare: $y - x + 2 + k \cdot (-x^2 + 2x + 3) = 0$.

Per $k = 0$ *si ottiene la parabola degenere* γ_1: $y - x + 2$ *(retta r) ;*

$\nexists k \in R$ *, per* $k \to \infty$ *si ottiene la parabola degenere* γ_2: $x^2 - 2x - 3 = 0$; $(x+1)(x-3) = 0$.

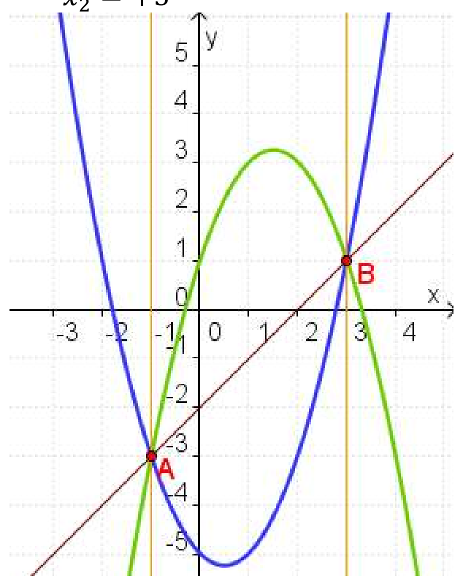
Coppia di rette parallele all'asse y .

Determiniamo gli eventuali punti base del fascio:

$$\begin{cases} y - x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x - 2 \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = +3 \end{matrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} R\,(-1; -3) \\ T\ \ (3\,;\ \ 1) \end{matrix}$ *Punti base del fascio.*

Si tratta di un fascio di parabole secanti nei punti A e B .



<u>*Soluzione b*</u>

Scriviamo il fascio di parabole in forma canonica:

$y = kx^2 + (1 - 2k)x - 3k - 2$

Per $k = 0$ *si ottiene la parabola degenere* $y = x - 2$ *(retta).*

In definitiva le parabole degeneri del fascio sono:

la retta r *di equazione* $y = x - 2$

la coppia di rette verticali $x + 1 = 0$ *e* $x - 3 = 0$.

Rappresentiamo alcune parabole del fascio.

Per $k = +1$ $\Rightarrow$ $y = x^2 - x - 5$

Per $k = -1$ $\Rightarrow$ $y = -x^2 + 3x + 1$.

<u>*Soluzione c*</u>

La parabola γ *del fascio avente come asse di simmetria la retta di equazione* $x = \frac{3}{4}$ *si ottiene ponendo:*

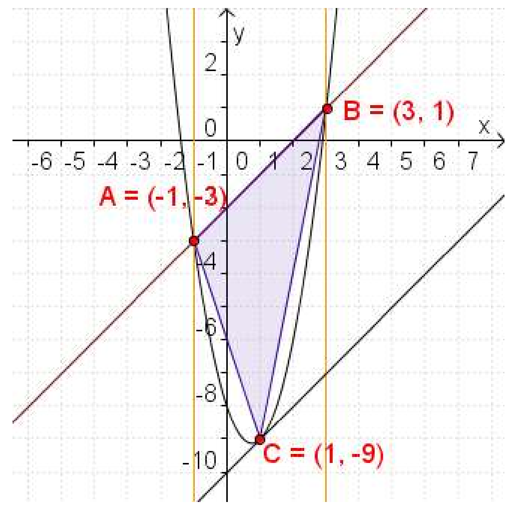
$-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$; $\qquad -\frac{1-2k}{2k} = \frac{3}{4}$; $\qquad \frac{2k-1}{2k} = \frac{3}{4}$; $\qquad 2 \cdot (2k - 1) = 3 \cdot k$; $\qquad C.E.: \ k \neq 0$

$4k - 2 = 3k$; $\qquad k = 2$.

La parabola γ *del fascio richiesta ha equazione :* $y = 2x^2 - 3x - 8$.

Soluzione d

Determiniamo l'area del segmento parabolico limitato dalla parabola γ *e dalla retta* r *.*
L'equazione della retta parallela alla retta AB e tangente la parabola è del tipo: $y = x + q$ *.*
Determiniamo il punto di tangenza C .



$\begin{cases} y = x + q \\ y = 2x^2 - 3x - 8 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 8 = x + q \\ - - - \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2 - 4x - 8 - q = 0 \\ - - - \end{cases}$

$\dfrac{\Delta}{4} = 0\,;$ $\qquad$ $4 - 2 \cdot (-8 - q) = 0\,;$

$4 + 16 + 2q = 0\,;$ $\qquad$ $2q = -20\,;$ $\qquad$ $q = -10$

La retta tangente ha equazione: $y = x - 10$

$\begin{cases} y = x - 10 \\ y = 2x^2 - 3x - 8 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 8 = x - 10 \\ - - - \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\ - - - \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ - - - \end{cases}$

$\begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \\ - - - \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ - - - \end{cases}$ $\quad \Rightarrow \quad C\ (1\,;\,-9)$

L'area del segmento parabolico limitato dalla parabola γ *e dalla retta* r *è :*

$$S \;=\; \frac{4}{3} \cdot S_{ABC} \;=\; \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix} \right| \;=\; \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} -1 - 3 & -3 - 1 \\ +1 - 3 & -9 - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \; \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} \;=\; \frac{2}{3} \cdot 32 = \frac{64}{3}\ .$$

Quesito 3

La funzione può essere studiata esplicitandola nel seguente modo:

$$y = 2 + \sqrt{|x-2|-3} \;=\; \begin{cases} 2 + \sqrt{+(x-2)-3} & se\;\; x \geq 2 \\ 2 + \sqrt{-(x-2)-3} & se\;\; x < 2 \end{cases} \qquad\qquad cioè$$

$$y = 2 + \sqrt{|x-2|-3} \;=\; \begin{cases} 2 + \sqrt{x-5} & se\;\; x \geq 2 \\ 2 + \sqrt{-x-1} & se\;\; x < 2 \end{cases}$$

Tracciamo quindi, il grafico della funzione: $y = 2 + \sqrt{-x-1}$ *nel semipiano* $x < 2$.

Il dominio della funzione è $D = \{x \in R \;|\; x \leq -1\}$.

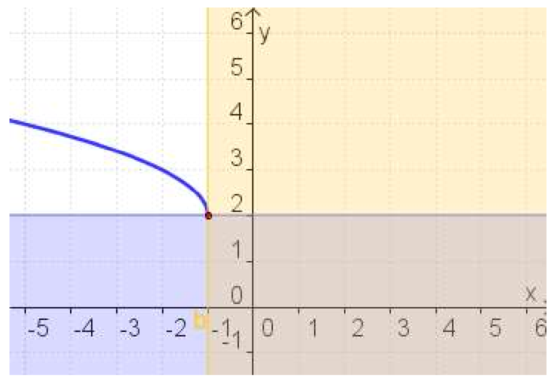
Isolando il radicale si ottiene la seguente equazione: $y - 2 = \sqrt{-x-1}$ *equivalente al sistema :*

$$\begin{cases} (y-2)^2 = -x-1 \\ y-2 \geq 0 \\ -x-1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - 4y + 4 = -x-1 \\ y \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y^2 + 4y - 5 \\ y \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

Tracciamo il ramo della parabola $x = -y^2 + 4y - 5$

$$y_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad V\,(-1\,;\,+2)\;.$$
$$x_V = -(2)^2 + 4\cdot 2 - 5 = -1$$

Ricordando il dominio della funzione $D = \{x \in R \;|\; x \leq -1\}$ *e la condizione* $y \geq 2$ *si ottiene il seguente grafico:*



Tracciamo poi, il grafico della funzione: $y = 2 + \sqrt{x-5}$ *nel semipiano* $x \geq 2$.

Il dominio della funzione è $D = \{x \in R \;|\; x \geq 5\}$.

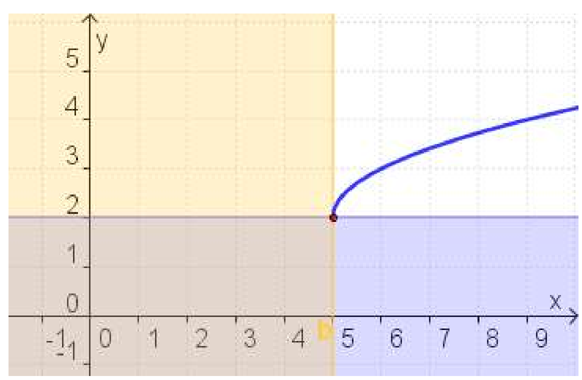
Isolando il radicale si ottiene la seguente equazione: $y - 2 = \sqrt{x-5}$ *equivalente al sistema :*

$$\begin{cases} (y-2)^2 = x-5 \\ y-2 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - 4y + 4 = x-5 \\ y \geq 2 \\ x \geq 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y^2 - 4y + 9 \\ y \geq 2 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Tracciamo il ramo della parabola $x = y^2 - 4y + 9$

$$y_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad V\,(5\,;\,2)\;.$$
$$x_V = (2)^2 - 4\cdot 2 + 9 = 5$$

Ricordando il dominio della funzione $D = \{x \in R \;|\; x \geq 5\}$ *e la condizione* $y \geq 2$ *si ottiene il seguente grafico:*



Concludendo, il grafico della funzione $y = 2 + \sqrt{|x-2| - 3}$ *è il seguente:*