Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2015-2016

Prova di Matematica : Piano cartesiano e retta

04.02.2016

prof. Mimmo Corrado

Tempo: 60 minuti.

Alunno: ____ Classe: 2B L. Scientifico

1. Dato il fascio di rette di equazione $(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{k}+\mathbf{2})\boldsymbol{y}+\mathbf{2}=\mathbf{0}$, determina:

a. il tipo (fascio proprio / fascio improprio)
b. la retta *b* del fascio passante per il punto $P(-2;4)$
c. la retta *c* del fascio perpendicolare all'asse x
d. la retta *d* del fascio parallela alla retta s di equazione $4x+2y-3=0$

2. Dato il triangolo di vertici: $\mathbf{A}\ (-\mathbf{2};\mathbf{2})$, $\mathbf{B}\ (\mathbf{2};\ \mathbf{0})$, $\mathbf{C}\ (\mathbf{4};\ \mathbf{6})$, determina:

a. l'area del triangolo
b. le coordinate dell'ortocentro F

Soluzione

a. Si tratta di un fascio proprio di rette perché il coefficiente angolare dipende dal parametro K

$m = \dfrac{k+1}{k+2}$ $\qquad$ $Il\ centro\ del\ fascio\ ha\ coordinate:\ C = (2\ ;\ 2)$

b. Imponendo il passaggio per il punto $P(-2; 4)$ si ha:

$(k+1)\cdot(-2) - (k+2)\cdot 4 + 2 = 0\,;$ $\qquad$ $-2k - 2 - 4k - 8 + 2 = 0\,;$

$-6k - 8 = 0\,;$ $\qquad$ $k = -\dfrac{8}{6} = -\dfrac{4}{3}$

La retta richiesta b ha equazione:

$\left(-\dfrac{4}{3}+1\right)x - \left(-\dfrac{4}{3}+2\right)\cdot y + 2 = 0\,;$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y + 2 = 0$ $\qquad$ $x + 2y - 6 = 0$

c. la retta c del fascio perpendicolare all'asse x è del tipo $ax + b = 0$ (cioè $b = 0$).

Essa si ottiene per $k = -2$.

La sua equazione è: $(-2+1)x - (-2+2)\cdot y + 2 = 0\,;$ $\qquad$ $-x + 2 = 0\,;$ $\qquad$ $x = 2\,.$

d. la retta d del fascio parallela alla retta s di equazione $4x + 2y - 3 = 0$

si ottiene imponendo la condizione di parallelismo: $m_f = m_s$.

$\dfrac{k+1}{k+2} = -\dfrac{4}{2}\,;$ $\qquad$ $\dfrac{k+1}{k+2} = -2\,;$ $\qquad$ $C.E.: k \neq -2$

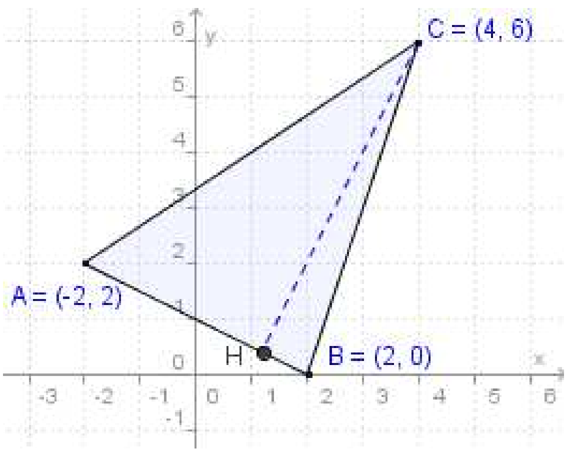
$k + 1 = -2(k+2)\,;$ $\qquad$ $k + 1 = -2k - 4\,;$ $\qquad$ $3k = -5$ $\qquad$ $k = -\dfrac{5}{3}$

la sua equazione è:

$\left(-\dfrac{5}{3}+1\right)x - \left(-\dfrac{5}{3}+2\right)\cdot y + 2 = 0\,;$ $\qquad$ $-\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y + 2 = 0$ $\qquad$ $2x + y - 6 = 0$

Dato il triangolo di vertici: $\mathbf{A\,(-2; 2)}$, $\mathbf{B\,(2;\ 0)}$, $\mathbf{C\,(4;\ 6)}$ **, determina:**

1. *l'area*
2. *le coordinate dell'ortocentro F*



<u>Soluzione 1</u>

Per il calcolo dell'area del triangolo occorre determinare la misura dell'altezza CH.

Per calcolare la misura dell'altezza CH è necessario conoscere le coordinate del punto H.

Il punto H è il punto di intersezione delle due rette AB e CH.

Calcoliamo pertanto le equazioni delle rette AB e CH.

L'equazione della retta AB è data da:

$\dfrac{y - y_B}{y_A - y_B} = \dfrac{x - x_B}{x_A - x_B}\,;$ $\qquad$ $\dfrac{y-0}{2-0} = \dfrac{x-2}{-2-2}\,;$ $\qquad$ $\dfrac{y}{2} = \dfrac{x-2}{-4}\,;$ $\qquad$ $2y = -x + 2\,;$ $\qquad$ $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

il cui coefficiente angolare della retta AB è $m_{AB} = -\frac{1}{2}$

La retta CH perpendicolare alla retta AB ha coefficiente angolare: $m_{CH} = -\frac{1}{m_{AB}} = 2$

ed equazione: $y - y_C = m_{CH}\,(x - x_C)\,;$ $\qquad$ $y - 6 = 2\,(x - 4)\,;$ $\qquad$ $y = 2x - 2$

Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette AB e CH:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2 = -\frac{1}{2}x + 1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 4 = -x + 2 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = 6 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = 2 \cdot \frac{6}{5} - 2 = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right).$$

Calcoliamo la misura dell'altezza CH:

$$\overline{CH} = \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2} = \sqrt{\left(4 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(6 - \frac{2}{5}\right)^2}\ u = \sqrt{\left(\frac{14}{5}\right)^2 + \left(\frac{28}{5}\right)^2}\ u$$

$$\sqrt{\frac{196}{25} + \frac{784}{25}}\ u = \sqrt{\frac{980}{25}}\ u = \sqrt{\frac{196}{5}}\ u = \frac{14}{\sqrt{5}}\ u$$

Calcoliamo la misura della base AB:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}\ u = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-0)^2}\ u = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}\ u = 2\sqrt{5}\ u$$

In definitiva l'area del triangolo è: $S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{14}{\sqrt{5}}\ u^2 = 14\ u^2$.

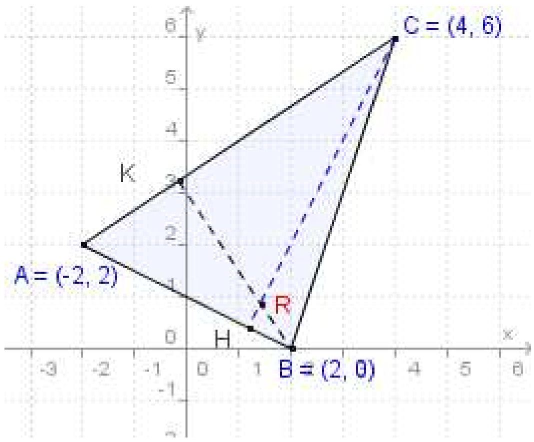
<u>Metodo 2</u>

L'area del triangolo può essere calcolata anche con la formula:

$$S = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4+2 & 6-2 \\ 2+2 & 0-2 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot (-12 - 16) \right| = 14\ u^2$$

<u>Soluzione 2</u>

L'ortocentro è il punto d'incontro delle tre altezze.



L'equazione della retta CH è già stata determinata in precedenza: $y = 2x - 2$

Determiniamo il coefficiente angolare della retta AC:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{2-6}{-2-4} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}.$$

La retta BK perpendicolare alla retta AC ha coefficiente angolare: $m_{BK} = -\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{3}{2}$

La retta BK ha equazione: $y - y_B = m_{BK}\ (x - x_B)$ *;*

$y - 0 = -\frac{3}{2}\ (x - 2)$ *;* $\qquad y = -\frac{3}{2}x + 3$

Determiniamo le coordinate dell'ortocentro F, punto di incontro delle due altezze CH e BK:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 3 = 2x - 2 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 6 = 4x - 4 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -7x = -10 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{7} + 3 = -\frac{15}{7} + 3 = \frac{-12+21}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases}$$

Pertanto, l'ortocentro ha coordinate: $F\left(\frac{10}{7}; \frac{6}{7}\right)$.