Prova di Matematica : Equazioni di grado superiore al primo e parabola

Alunno: ______________________________________ Classe: 2B L. Scientifico

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$4x^{13} - 8x^{12} - 20x^{11} + 24x^{10} = 0$

$2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2 = 0$

$(3x-1)^4 - 16 = 0$

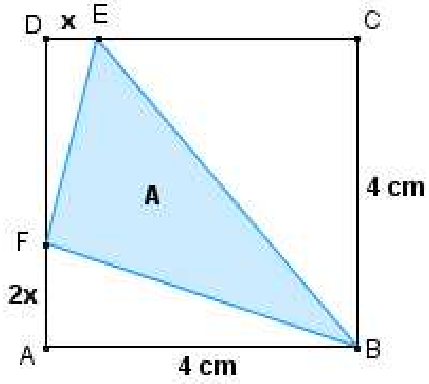
$\dfrac{3x^2+4x}{x^2+4x} - \dfrac{27}{4-7x-2x^2} = \dfrac{6}{2x-1}$

2. Determina per quali valori del parametro k l'equazione: $kx^2 - 2(k-2)x + k - 7 = 0$

a. ha radici uguali;
b. ha radici reciproche;
c. ha radici tali che la loro somma è uguale al loro prodotto.

3. Utilizzando i dati della figura

a. dimostra che l'area del triangolo BEF vale $A = x^2 - 4x + 8$;
b. rappresenta graficamente la funzione A;
c. trova per quale valore di x l'area misura 5 cm^2;
d. stabilisci se esiste un valore di x per cui l'area è nulla.



4. Determina l'equazione della parabola avente il fuoco in $F(1\,;\,-1)$ e per direttrice l'asse delle x.

Soluzione

1. **Risolvi le seguenti equazioni:**

$\mathbf{4x^{13} - 8x^{12} - 20x^{11} + 24x^{10} = 0}$;

$4x^{10} \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = 0$

	1	−2	−5	+6
+1		+1	−1	−6
	1	−1	−6	=

$4x^{10} \cdot (x-1)(x^2 - x - 6) = 0$

	1	−1	−6
−2		−2	+6
	1	−3	=

$4x^{10} \cdot (x-1)(x+2)(x-3) = 0$

Le soluzioni sono: $x_{1,2,\ldots,10} = \mathbf{0} \quad \wedge \quad x_{11} = \mathbf{1} \quad \wedge \quad x_{12} = \mathbf{-2} \quad \wedge \quad x_{13} = \mathbf{3}$

$\mathbf{2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2 = 0}$;

Non essendo $x = 0$ soluzione dell'equazione dividiamo tutti i termini per x^2

$2x^2 + 9x + 14 + \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$; $\qquad 2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 9 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$;

Si pone $x + \frac{1}{x} = z \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$

$2 \cdot (z^2 - 2) + 9z + 14 = 0$; $\qquad 2z^2 - 4 + 9z + 14$;

$2z^2 + 9z + 10 = 0$; $\qquad \Delta = 81 - 80 = 1 \qquad z_{1,2} = \frac{-9 \mp 1}{4} = \begin{matrix} z_1 = -\frac{5}{2} \\ z_2 = -2 \end{matrix}$

Sostituendo in $x + \frac{1}{x} = z$ si ha:

$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$; $\qquad 2x^2 + 2 = -5x$; $\qquad 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 \qquad x_{1,2} = \frac{-5 \mp 3}{4} = \begin{matrix} x_1 = \mathbf{-2} \\ x_2 = \mathbf{-\frac{1}{2}} \end{matrix}$

$x + \frac{1}{x} = -2$; $\qquad x^2 + 1 = -2x$; $\qquad x^2 + 2x + 1 = 0$; $\qquad (x+1)^2 = 0$; $\qquad x_{3,4} = \mathbf{-1}$

$\mathbf{(3x-1)^4 - 16 = 0}$; $\quad 3x - 1 = \mp\sqrt[4]{16}$; $\quad 3x - 1 = \mp 2$; $\quad \begin{matrix} 3x - 1 = -2 \\ 3x - 1 = 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3x = -1 \\ 3x = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = \mathbf{-\frac{1}{3}} \\ x = \mathbf{+1} \end{matrix}$

$\mathbf{\frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 4x} - \frac{27}{4 - 7x - 2x^2} = \frac{6}{2x - 1}}$; $\qquad \mathbf{\frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 4x} + \frac{27}{2x^2 + 7x - 4} - \frac{6}{2x - 1} = 0}$;

$\mathbf{\frac{x \cdot (3x+4)}{x \cdot (x+4)} + \frac{27}{(x+4) \cdot (2x-1)} - \frac{6}{2x-1} = 0}$; $\qquad \boldsymbol{C.E.: \ x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq -4 \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{2}}$

$\mathbf{\frac{3x+4}{x+4} + \frac{27}{(x+4) \cdot (2x-1)} - \frac{6}{2x-1} = 0}$; $\qquad \mathbf{(3x+4) \cdot (2x-1) + 27 - 6 \cdot (x+4) = 0}$;

$\mathbf{6x^2 - 3x + 8x - 4 + 27 - 6x - 24 = 0}$; $\qquad \mathbf{6x^2 - x - 1 = 0}$;

$\boldsymbol{\Delta = 1 + 24 = 25} \qquad \boldsymbol{x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{25}}{12} = \begin{matrix} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}}$ $\quad \begin{matrix} \textit{Soluzione accettabile} \\ \textit{Non accettabile} \end{matrix}$

2. **Determina per quali valori del parametro k l'equazione:** $\boldsymbol{kx^2 - 2(k-2)x + k - 7 = 0}$
   a. ha radici uguali;
   b. ha radici reciproche;
   c. ha radici tali che la loro somma è uguale al loro prodotto.

   <u>*Soluzione*</u>

   L'equazione ha soluzioni reali se $\Delta \geq 0$:

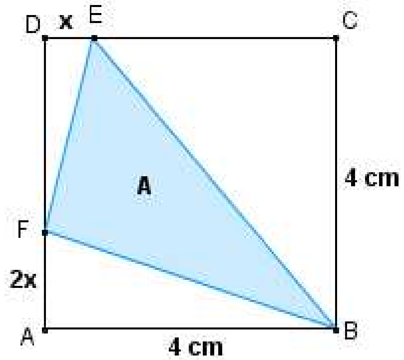
   $\Delta = (k-2)^2 - k \cdot (k-7) \;=\; k^2 + 4 - 4k - k^2 + 7k = 3k + 4 \qquad\qquad k + 4 \geq 0; \qquad k \geq -\dfrac{4}{3}$

   L'equazione ha soluzioni uguali se $\Delta = 0$: $\quad 3k + 4 = 0\,; \qquad \boldsymbol{k = -\frac{4}{3}}$

   L'equazione ha soluzioni reciproche se $x_1 = \frac{1}{x_2}\,; \quad x_1 \cdot x_2 = 1\,; \quad \frac{c}{a} = 1\,; \quad \frac{k-7}{k} = 1\,; \quad k - 7 = k \quad \boldsymbol{\nexists k \in R}$.

   L'equazione ha soluzioni tali che: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2\,; \quad -\frac{b}{a} = \frac{c}{a}\,; \quad -b = c \quad con\ a \neq 0;$

   $2(k-2) = k - 7\,; \qquad 2k - 4 = k - 7\,; \qquad k = -3$ non accettabile $\boldsymbol{\nexists k \in R}$.



3. **Utilizzando i dati della figura**

   a. dimostra che l'area del triangolo BEF vale $A = x^2 - 4x + 8$;

   b. rappresenta graficamente la funzione A;

   c. trova per quale valore di x l'area misura 5 cm^2;

   d. stabilisci se esiste un valore di x per cui l'area è nulla.

   <u>*Soluzione*</u>

   Le condizioni di esistenza sono: $0 \leq 2x \leq 4\,; \qquad 0 \leq x \leq 2$

   L'area del triangolo vale:

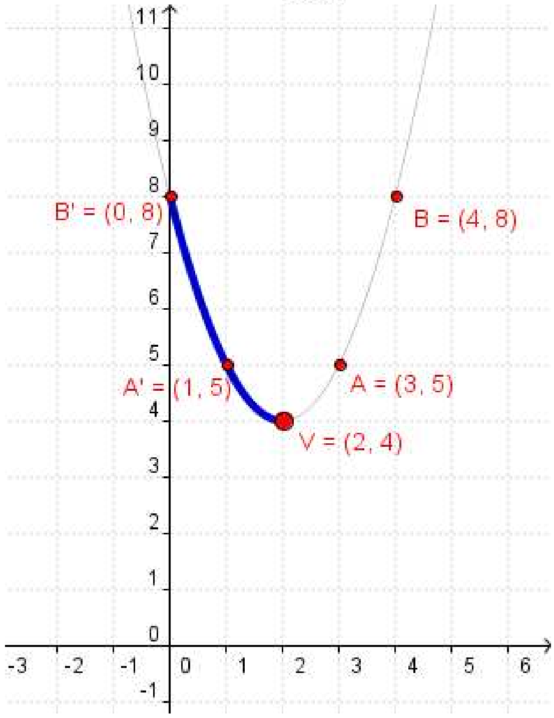
   $$A \;=\; \overline{AB}^{\,2} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AF} - \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{DF} - \frac{1}{2} \cdot \overline{EC} \cdot \overline{BC}\;;$$

   $$A \;=\; 4^{\,2} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot (4 - 2x) - \frac{1}{2} \cdot (4 - x) \cdot 4\;;$$

   $$A \;=\; 16 - 4x - 2x + x^2 - 8 + 2x\,;$$

   $$A \;=\; x^2 - 4x + 8\;.$$

   Il grafico della funzione A è il ramo di parabola con $0 \leq x \leq 2$ (in colore blue).



   Imponiamo che l'area misuri $5\ \mathrm{cm}^2$.

   $A = 5\ cm^2\;; \qquad x^2 - 4x + 8 = 5\;;$

   $x^2 - 4x + 3 = 0\;; \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1\,;$

   $$x_{1,2} = 2 \mp 1 = \begin{array}{ll} x_1 = 1 & \textit{Soluzione accettabile} \\ x_2 = 3 & \textit{Soluzione non accettabile} \end{array}$$

   Non esiste alcun valore di x per cui l'area sia nulla, perchè la parabola (Area del triangolo) è sempre maggiore di zero.

   Il valore minimo dell'area si ha per $x = 2 \quad \longrightarrow \quad$ Area $A = 4 \qquad$ punto $V\ (2\,;\ 4)$.

   Il valore massimo dell'area si ha per $x = 0 \quad \longrightarrow \quad$ Area $A = 8 \qquad$ punto $B'(0\,;\ 8)$.

4. **Determina l'equazione della parabola avente il fuoco in $\boldsymbol{F(1\,;\,-1)}$ e per direttrice l'asse delle x.**

   $\overline{PF} = \overline{PH}\,; \qquad \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = |y - 0|\,; \qquad (x-1)^2 + (y+1)^2 = (y-0)^2;$

   $x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 + 2y = y^2\,; \qquad 2y = -x^2 + 2x - 2\,; \qquad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1}$