05.11.2015
prof. Mimmo Corrado

Prova di Matematica : Numeri reali e radicali

Alunno: ______________________________________ Classe: 2A L. Scientifico

1. Per ognuna delle seguenti affermazioni ed espressioni indica se è vera V o falsa F, motivando la risposta

$\sqrt{0{,}25}$ è un numero decimale illimitato non periodico	V F	$\sqrt[3]{5} < \sqrt[4]{10}$	V F
$\sqrt[n]{n\sqrt[n]{\sqrt[n]{2}}} = 2^{\frac{1}{3n}}$ con $n \in \mathrm{N} - \{0\}$	V F	$\sqrt{11+\sqrt{57}} = \dfrac{\sqrt{38}+\sqrt{6}}{2}$	V F
$a\sqrt[4]{b} = \sqrt{a^4 b}, \forall a,\ b \in \mathrm{R}$	V F	$3 \cdot \sqrt[7]{\dfrac{1}{3}} = 9^{-\frac{3}{7}}$	V F

2. Completa, motivando le tue risposte

$\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} \quad =$	Le condizioni di esistenza di $\sqrt{\frac{a^2}{a+1}}$ sono:
$17+12\sqrt{2} \ = \ (\qquad \qquad)^2$	$2\sqrt[5]{128} \ = \ 16^{\overline{\ \ }}$

3. Semplifica i seguenti radicali

$\sqrt[12]{\dfrac{9a^6}{b^4}}$	$\sqrt[12]{a^9-9a^8+27a^7-27a^6} \ =$

4. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili

$\sqrt{\dfrac{12}{125}} \ =$	$\sqrt[4]{\dfrac{32(y-1)^7}{81x^4}} =$

5. Semplifica la seguente espressione, supponendo positivi tutti i fattori letterali.

$$\sqrt{2-\frac{3x-2}{2x-1}} : \left(\sqrt{1-\frac{x-1}{2x-1}} \cdot \sqrt[3]{2+\frac{1}{x-1}}\right) =$$

$$\frac{4 \cdot \sqrt[6]{\left(2-\sqrt{5}\right)^6} - \left(\sqrt{\sqrt[9]{5}}\right)^9}{\left(\sqrt{3}-2\right)^2 \cdot \left(8-3\sqrt{5}\right)} =$$

6. Risolvi la seguente disequazione:

$$\frac{\sqrt{3}+x^2}{x+\sqrt{3}} - x \leq 1\,;$$

Soluzione

1. Per ognuna delle seguenti affermazioni ed espressioni indica se è vera V o falsa F, motivando la risposta.

$\sqrt{0{,}25}$ è un numero decimale illimitato non periodico	**F**
$\sqrt[n]{n\sqrt[n]{\sqrt[n]{2}}} = 2^{\frac{1}{3n}}$ con $n \in \mathrm{N} - \{0\}$	**F**
$a\sqrt[4]{b} = \sqrt{a^4 b}, \quad \forall a, b \in \mathrm{R}$	**F**

$\sqrt[3]{5} < \sqrt[4]{10}$	**V**
$\sqrt{11+\sqrt{57}} = \dfrac{\sqrt{38}+\sqrt{6}}{2}$	**V**
$3 \cdot \sqrt[7]{\dfrac{1}{3}} = 9^{-\frac{3}{7}}$	**F**

$$\sqrt[n]{n\sqrt[n]{\sqrt[n]{2}}} = \sqrt[n]{n \cdot \sqrt[n^2]{2}} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{\sqrt[n^2]{2}} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n^3]{2} = n^{\frac{1}{n}} \cdot 2^{\frac{1}{n^3}} .$$

$$a\sqrt[4]{b} = \begin{cases} +\sqrt{a^4 b} & a \geq 0 \\ -\sqrt{a^4 b} & a < 0 \end{cases} \qquad \wedge \qquad b \geq 0$$

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt[4]{10} \ ; \quad \sqrt[12]{5^4} < \sqrt[12]{10^3} \ ; \quad \sqrt[12]{625} < \sqrt[12]{1000} .$$

$$\sqrt{11+\sqrt{57}} = \qquad a^2 - b = 11^2 - 57 = 121 - 57 = 64 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{11+\sqrt{57}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{64}}{2}} + \sqrt{\frac{11-\sqrt{64}}{2}} = \sqrt{\frac{19}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{38}+\sqrt{6}}{2} .$$

$$3 \cdot \sqrt[7]{\frac{1}{3}} = \sqrt[7]{3^7 \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt[7]{3^6} = \sqrt[7]{9^3} = 9^{\frac{3}{7}}$$

2. Completa, motivando le tue risposte.

$$\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} = \left|1-\sqrt{5}\right| = -\left(1-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5} - 1$$

$$17 + 12\sqrt{2} = 9 + 8 + 12\sqrt{2} = \left(\ 3 \ + \ 2\sqrt{2}\ \right)^2$$

Le condizioni di esistenza di $\sqrt{\dfrac{a^2}{a+1}}$ sono $\boldsymbol{a > -1}$

Infatti $\dfrac{a^2}{a+1} \geq 0$; $\quad \begin{matrix} a^2 \geq 0 \\ a+1 > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \forall a \in R \\ a > -1 \end{matrix} \quad a > -1$

$$2\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^7} = \sqrt[5]{2^{12}} = \sqrt[5]{(2^4)^3} =$$

$$= \sqrt[5]{16^3} = \mathbf{16^{\frac{3}{5}}}$$

3. Semplifica i seguenti radicali

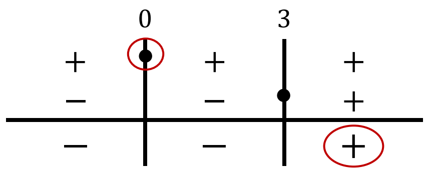
$$\sqrt[12]{\frac{9a^6}{b^4}} = \sqrt[6]{\frac{3|a^3|}{b^2}} \qquad con\ \ b \neq 0$$

$$\sqrt[12]{a^9 - 9a^8 + 27a^7 - 27a^6} = \sqrt[12]{a^6(a^3 - 9a^2 + 27a - 27)} = \sqrt[12]{a^6(a-3)^3} =$$

$$= \sqrt[4]{a^2 \cdot (a-3)} \qquad C.E.:\ a \geq 3 \ \vee \ a = 0$$

Infatti: $a^6 \cdot (a-3)^3 \geq 0$

$$a^6 \cdot (a-3)^3 \geq 0 \qquad \begin{matrix} a^6 \geq 0 \\ (a-3)^3 \geq 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \forall a \in R \\ a \geq 3 \end{matrix}$$



4. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili.

$$\sqrt{\frac{12}{125}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 3}{5^2 \cdot 5}} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{25}$$

$$\sqrt[4]{\frac{32(y-1)^7}{81x^4}} = \sqrt[4]{\frac{2^5(y-1)^7}{3^4x^4}} = \frac{2(y-1)}{3|x|} \cdot \sqrt[4]{2(y-1)^3}$$

$$C.E.:\ \ x \neq 0 \ \ \wedge \ \ y \geq 1$$

5. Semplifica la seguente espressione, supponendo positivi tutti i fattori letterali.

$$\sqrt{2-\frac{3x-2}{2x-1}}:\left(\sqrt{1-\frac{x-1}{2x-1}}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{1}{x-1}}\right)=\sqrt{\frac{4x-2-3x+2}{2x-1}}:\left(\sqrt{\frac{2x-1-x+1}{2x-1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2x-2+1}{x-1}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{2x-1}}:\left(\sqrt{\frac{x}{2x-1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x-1}}\right)=\frac{\sqrt{\frac{x}{2x-1}}}{\sqrt{\frac{x}{2x-1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x-1}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x-1}}}=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2x-1}}\ .$$

oppure

$$=\sqrt{\frac{x}{2x-1}}:\left(\sqrt{\frac{x}{2x-1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x-1}}\right)=\sqrt{\frac{x}{2x-1}}:\left(\sqrt[6]{\frac{x^3}{(2x-1)^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(2x-1)^2}{(x-1)^2}}\right)=\sqrt{\frac{x}{2x-1}}:\sqrt[6]{\frac{x^3}{(2x-1)^3}\cdot\frac{(2x-1)^2}{(x-1)^2}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{x^3}{(2x-1)^3}}:\sqrt[6]{\frac{x^3}{(2x-1)\cdot(x-1)^2}}=\sqrt[6]{\frac{x^3}{(2x-1)^3}\cdot\frac{(2x-1)\cdot(x-1)^2}{x^3}}=\sqrt[6]{\frac{(x-1)^2}{(2x-1)^2}}=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2x-1}}\ .$$

$$\frac{4\cdot\sqrt[6]{\left(2-\sqrt{5}\right)^6}-\left(\sqrt{\sqrt[9]{5}}\right)^9}{\left(\sqrt{3}-2\right)^2\cdot\left(8-3\sqrt{5}\right)}=$$

Occorre fare attenzione a: $\sqrt[6]{\left(2-\sqrt{5}\right)^6}=\left|2-\sqrt{5}\right|=-\left(2-\sqrt{5}\right)$

Perchè $2-\sqrt{5}<0$

$$=\frac{4\cdot\sqrt[6]{\left(2-\sqrt{5}\right)^6}-\left(\sqrt{\sqrt[9]{5}}\right)^9}{\left(\sqrt{3}-2\right)^2\cdot\left(8-3\sqrt{5}\right)}=\frac{4\cdot\left[-\left(2-\sqrt{5}\right)\right]-\sqrt{5}}{\left(3+4-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(8-3\sqrt{5}\right)}=\frac{-8+4\sqrt{5}-\sqrt{5}}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(8-3\sqrt{5}\right)}=\frac{3\sqrt{5}-8}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(8-3\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{-\left(8-3\sqrt{5}\right)}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(8-3\sqrt{5}\right)}=\frac{-1}{7-4\sqrt{3}}=\frac{-1}{7-4\sqrt{3}}\cdot\frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=\frac{-7-4\sqrt{3}}{49-48}=\frac{-7-4\sqrt{3}}{1}=-7-4\sqrt{3}$$

6. Risolvi la seguente disequazione:

$$\frac{\sqrt{3}+x^2}{x+\sqrt{3}}-x\le 1\,;$$

$$\frac{\sqrt{3}+x^2}{x+\sqrt{3}}-x-1\le 0\,;$$

$$\frac{\sqrt{3}+x^2-x^2-\sqrt{3}x-x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\le 0\,;$$

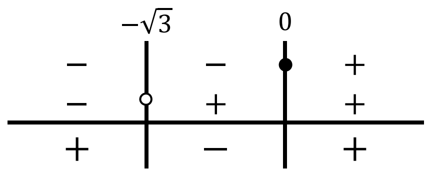
$$\frac{-\sqrt{3}\,x-x}{x+\sqrt{3}}\le 0\,;$$

$$\frac{-x\left(\sqrt{3}+1\right)}{x+\sqrt{3}}\le 0\,;$$

$$-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)x}{x+\sqrt{3}}\le 0\,;$$

$$\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)x}{x+\sqrt{3}}\ge 0\,;$$

$$\begin{array}{lll}\left(\sqrt{3}+1\right)x\ge 0 & x\ge 0 & x\ge 0\\ x+\sqrt{3}>0 & x>-\sqrt{3} & x>-\sqrt{3}\end{array}$$



$x<-\sqrt{3} \quad \vee \quad x\ge 0$.