Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2014-2015

Prova di Matematica: *Studio di una funzione*

29.05.2015

Alunno: ____ Classe: *5B L. Classico*

prof. Mimmo Corrado

Tempo 60 minuti

Studia e rappresenta il grafico della funzione: $f(x) = \frac{3x^2+4x+2}{x^2-1}$

Soluzione

Studia e rappresenta il grafico della funzione: $f(x) = \frac{3x^2+4x+2}{x^2-1}$

1. Dominio

La funzione è una funzione algebrica razionale fratta.

$Dominio\ f(x) \ = \ ]-\infty\,,-1[\ \cup \ ]-1\,,+1[\ \cup \ ]+1\,,+\infty[$

Infatti: $x^2-1=0$; $x^2=1$; $x=\pm 1$

2. Simmetrie

La funzione non presenta simmetrie. Infatti:

$$f(-x) \ = \ \frac{3(-x)^2+4\cdot(-x)+2}{(-x)^2-1} \ = \ \frac{3x^2-4x+2}{x^2-1} \ \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

3. Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x^2+4x+2}{x^2-1} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A\,(0\,;-2)$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x^2+4x+2}{x^2-1} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{3x^2+4x+2}{x^2-1} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2+4x+2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-6}}{3} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \nexists x \in R$$

4. Segno

$$f(x) > 0 \ ; \qquad \frac{3x^2+4x+2}{x^2-1} > 0$$

$N > 0\,;$ $\quad 3x^2+4x+2 > 0 \quad \forall x \in R$

$D > 0\,;$ $\quad x^2-1 > 0 \quad x < -1 \ \vee \ x > 1$ $\qquad \Rightarrow \qquad x < -1 \ \vee \ x > 1$

Pertanto:

$f(x) > 0 \quad in \quad]-\infty\,,-1[\ \cup \ ]+1\,,+\infty[$

$f(x) > 0 \quad in \quad]-1\,,+1[$

5. Limiti e asintoti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x+2}{x^2-1} \ = \ \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \ = \ \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} \ = \ 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 3 \ \text{ è } un\ asintoto\ orizzontale.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+4x+2}{x^2-1} \ = \ \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 \ \text{ è } un\ asintoto\ verticale\ .$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+4x+2}{x^2-1} \ = \ \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -1 \ \text{ è } un\ asintoto\ verticale\ .$$

6. Derivata prima

$$f'(x) \;=\; \frac{(6x+4)\cdot(x^2-1)-(3x^2+4x+2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} \;=\; \frac{6x^3-6x+4x^2-4-6x^3-8x^2-4x}{(x^2-1)^2} \;=$$

$$= \frac{-4x^2-10x-4}{(x^2-1)^2} \qquad con \quad Dominio\ f'(x) \;=\;]-\infty\,,-1[\ \cup\ ]-1\,,+1[\ \cup\ ]+1\,,+\infty[$$

7. Zeri di $f'(x)$

$$f'(x)=0 \;:\quad \frac{-4x^2-10x-4}{(x^2-1)^2}=0\ ; \qquad -4x^2-10x-4=0\ ; \qquad 2x^2+5x+2=0$$

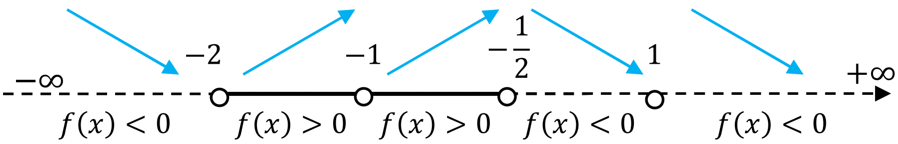
$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2\cdot 2} = \frac{-5\pm 3}{4} = \begin{matrix} x_1=\dfrac{-5-3}{4}=-2 \\ x_1=\dfrac{-5+3}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{matrix}$$

8. Segno della Derivata prima

$$f'(x)>0 \;:\quad \frac{-4x^2-10x-4}{(x^2-1)^2}>0\ ;$$

$$\begin{matrix} N>0\ ; & -4x^2-10x-4 & -2<x<-\dfrac{1}{2} \\ \mathrm{D}>0\ ; & (x^2-1)^2 & \forall x\in Dom\ (f) \end{matrix} \qquad -2<x<-1 \quad \vee \quad -1<x<-\frac{1}{2}$$

Pertanto:



Si conclude quindi, che: $x=-2$ è un punto di minimo relativo.

Mentre $x=-\frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo.

$$f(-2) \;=\; \frac{3(-2)^2+4\cdot(-2)+2}{(-2)^2-1} = \frac{12-8+2}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1} = \frac{\frac{3}{4}-2+2}{\frac{1}{4}-1} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} = -1$$

$M\ (-2\,;2)$ è un punto di minimo relativo

$N\ \left(-\frac{1}{2}\,;-1\right)$ è un punto di massimo relativo

9. Derivata seconda

$$f'(x) = \frac{(-8x-10)\cdot(x^2-1)^2 - 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x\cdot(-4x^2-10x-4)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(-8x-10)\cdot(x^2-1)^2 - 4x\cdot(x^2-1)\cdot(-4x^2-10x-4)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-1)\cdot[(-8x-10)\cdot(x^2-1) - 4x\cdot(-4x^2-10x-4)]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(-8x-10)\cdot(x^2-1) - 4x\cdot(-4x^2-10x-4)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{-8x^3+8x-10x^2+10+16x^3+40x^2+16x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{8x^3+30x^2+24x+10}{(x^2-1)^3}\ .$$

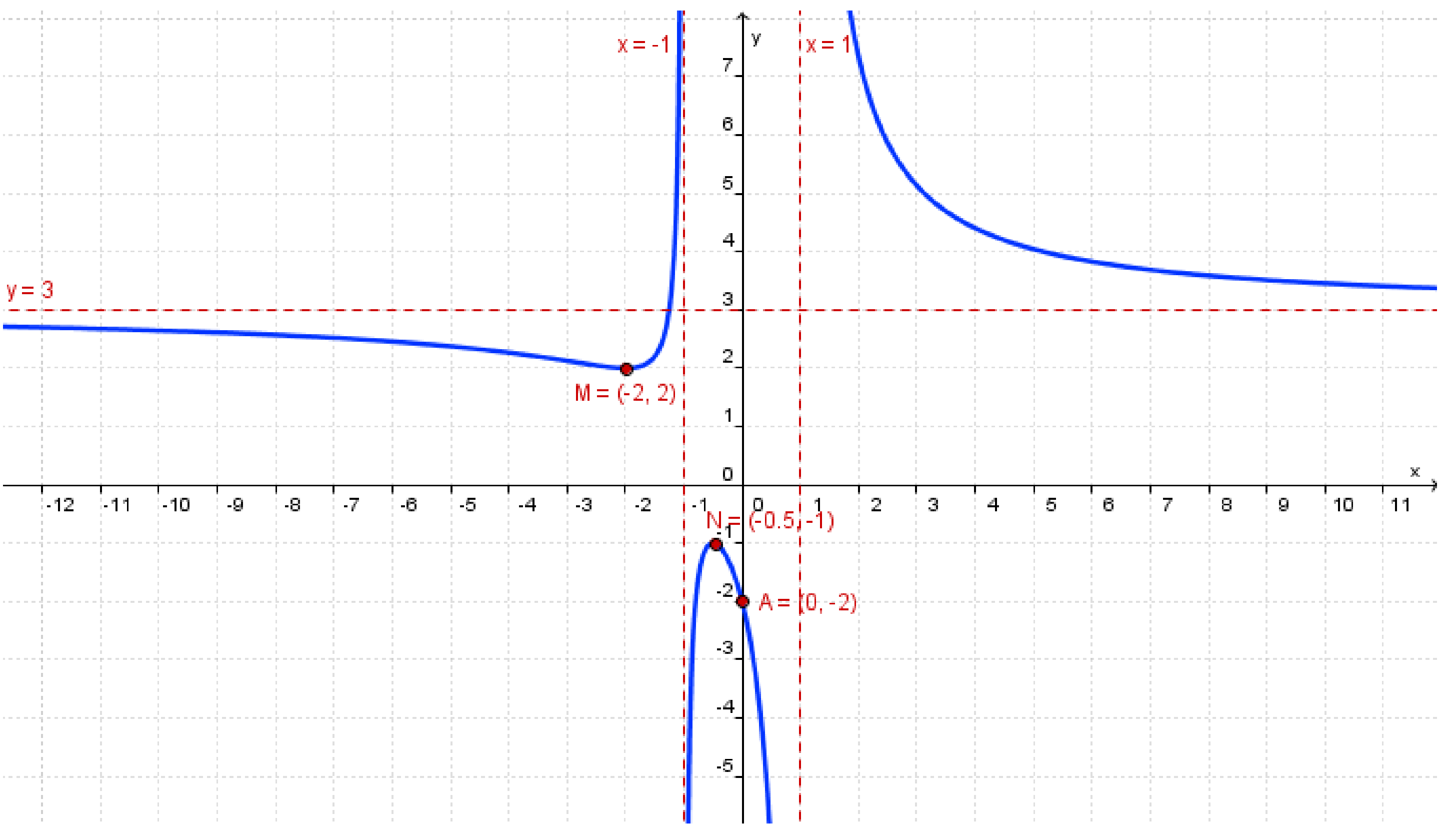
10. Zeri di $f''(x)$

$\dfrac{8x^3+30x^2+24x+10}{(x^2-1)^3} = 0$; $8x^3+30x^2+24x+10 = 0$.

Tale equazione non è risolvibile per via elementare. Occorre applicare metodi grafici non trattati a lezione.
Dalle informazioni precedenti si ricava che c'è un punto di flesso a sinistra di $x = -2$.

11. Grafico di $f(x)$

Il grafico di $f(x)$ è sotto riportato.



11. Codominio di $f(x)$

Il codominio di $f(x)$ è $C =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$.

La funzione è illimitata sia inferiormente sia superiormente. Essa è pertanto, priva di minimo assoluto e di massimo assoluto